



Phys. sp.

916

Ward



<36634996610019

<36634996610019

Bayer. Staatsbibliothek

S

DIE PRINCIPIEN
DER
MATHEMATISCHEN PHYSIK
UND DIE
POTENTIALTHEORIE

NEBST IHREN VORZÜGLICHSTEN ANWENDUNGEN

IM GRUNDRISS DARGESTELLT

VON

THEODOR WAND,

CONSISTORIAL-ASSESSOR UND MITGLIED DER BAYRISCHEN
ABGEORDNETENKAMMER.

MIT 8 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.



DRUCK VON B. G. TEUBNER IN DRESDEN.

VORWORT.

Bei der Richtung, welche die mathematische Physik in den letzten zwei Jahrzehnten eingeschlagen hat, ist die Kenntniss der Potentialtheorie nicht bloß für den Fachmann, sondern auch für den Dilettanten, der etwas tiefer in die Natur einzudringen wünscht, zur unumgänglichen Nothwendigkeit geworden. Ich habe dies auf's Lebhafteste gefühlt, als ich vor einiger Zeit mich damit befasste, mir die Ergebnisse der neueren Forschungen auf dem Gebiete der mathematischen Physik anzueignen. Gleichwohl fehlt es bis jetzt noch an einem Buche, welches geeignet wäre, den Anfänger, auch wenn er mit den Principien und Methoden der Differenzial- und Integralrechnung vertraut ist, mit der Potentialtheorie vollständig und bequem bekannt zu machen. Ich weiss nur zwei Schriften, welche diesen Zweck einigermaßen erfüllen, nämlich das Lehrbuch der Potentialfunction von Clausius und die Einleitung in die Elektrostatik von Beer; allein die erste Schrift, indem sie sich darauf beschränkt, einige Sätze der Potentialtheorie zu entwickeln, bietet dem Anfänger viel zu wenig; die andere trägt, ihrem Zwecke entsprechend, die Potentialtheorie nur nebenbei vor, soweit sie nämlich auf die Elektrostatik sich bezieht, ohne sich

bezüglich aller Punkte auf eine eingehende Beweisführung, wie sie der Anfänger wünscht, einzulassen. Wer sich daher mit der Potentialtheorie vollständig vertraut machen will, ist auch heute noch darauf angewiesen, die Originalarbeiten von Laplace, Poisson, Green und Gauss zu studiren. Diese sind aber nicht gerade Jedermann zugänglich und ausserdem hat auch nicht Jedermann Zeit und Lust, sich durch die Schwierigkeiten, welche die Darstellungsweise dieser Männer hier und da selbst dem geübten Mathematiker bietet, durchzuarbeiten. Diese Schwierigkeiten zu verringern, sowie allen Denjenigen, welche die Potentialtheorie und ihre hauptsächlichsten Anwendungen in bequemer Weise kennen lernen wollen, ein entsprechendes Hilfsmittel zu bieten, ist der Zweck der gegenwärtigen Schrift.

Speyer, im December 1870.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

I. Abtheilung.

Die Principien der mathematischen Physik.

	Seite
§ 1. Die logischen Grundlagen der Physik	1
§ 2. Einige analytische Hülfsätze	5
§ 3. Das Gefälle der Functionen	9
§ 4. Die Coordinatensysteme	13
§ 5. Die Trajectorien	13
§ 6. Definition der Kraftfunction, der Potentialfunction und des Potentials. Haupteigenschaften desselben	15
§ 7. Allgemeine Sätze über die Potentialfunction	20
§ 8. Die Niveauflächen. Der Gauss'sche Satz	21
§ 9. Einige allgemeine Sätze und Begriffe der Mechanik. Drehungsmoment, Hauptebene, Schwerpunkt	22
§ 10. Anwendung dieser allgemeinen Begriffe und Sätze. Das Princip der Erhaltung der Flächenräume in absoluten und relativen Coordinaten ausgedrückt	25
§ 11. Die Bewegung fester Körper. Das Trägheitsmoment	27
§ 12. Die freie Rotation und die drei Hauptachsen	30

II. Abtheilung.

Die Potentialfunction im engeren Sinne.

§ 13. Das Newton'sche Attractionsgesetz. Wirkung der Elektricität und des Magnetismus	35
§ 14. Die Potentialfunction im engeren Sinne. Der Zusammenhang ihrer Theorie und der Theorie der Wärmeleitung. Die wirkenden	

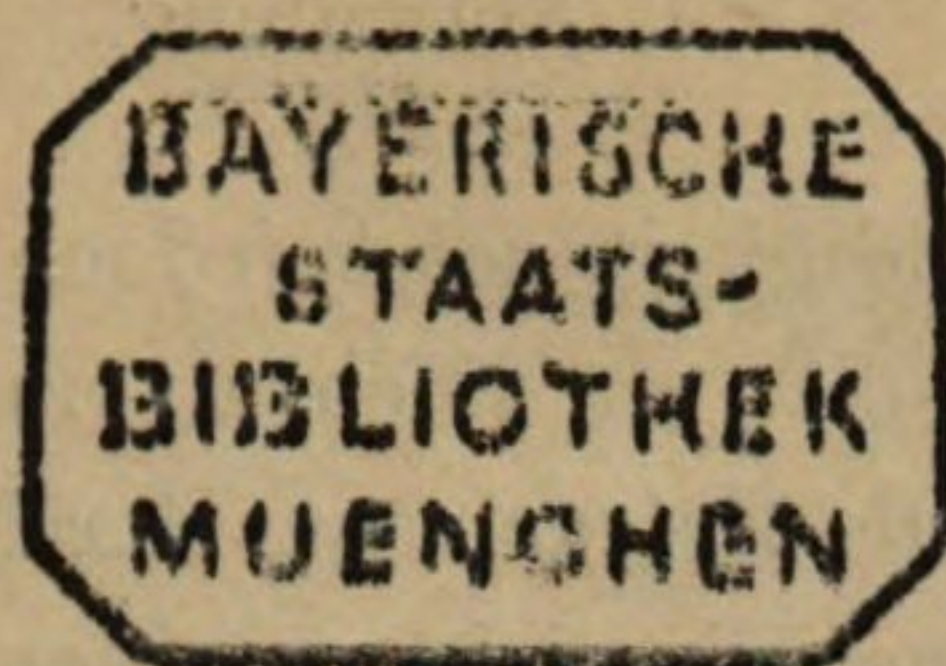
	Seite
Massen lassen sich als Wärmequellen von constanter Mächtigkeit ansehen	36
§ 15. Consequenzen aus dieser Anschauungsweise durch zehn Hauptsätze über die Potentialfunction ausgedrückt. Die Wärme, welche durch das Zusammenstürzen kosmischer Massen entsteht	41
§ 16. Vier weitere Sätze über die Potentialfunction	46
§ 17. Untersuchungen über die Differenzialcoefficienten der Potentialfunction innerhalb und ausserhalb der wirkenden Massen	50
§ 18. Fortsetzung und Anwendung der gewonnenen Resultate	57
§ 19. Transformation des Ausdrucks Δ^2 in andere Coordinatensysteme	62
§ 20. Analytischer Beweis der allgemeinen Sätze über die Potentialfunction	67
§ 21. Berechnung der Potentialfunction. Einige allgemeine Sätze	74
§ 22. Die Potentialfunction magnetischer Massen. Moment und Achse des Magneten	77
§ 23. Die Potentialfunction des homogenen Ellipsoids innerhalb desselben	79
§ 24. Ausserhalb desselben. Die Potentialfunction des Ellipsoids ausserhalb desselben hängt nur von der Masse und den geometrischen Excentricitäten ab	83
§ 25. Die Kugelfunctionen. Allgemeine Sätze über dieselben	86
§ 26. Darstellung der Kugelfunctionen durch die Potenzen der Richtungscosinus und Auflösung der Potenzen der Richtungscosinus in Kugelfunctionen	90
§ 27. Die Kugelfunctionen durch Länge und Breite ausgedrückt	94
§ 28. Die Potentialfunction von beliebigen homogenen oder nicht homogenen Massen mit Hülfe der Sätze über die Kugelfunctionen entwickelt	97
§ 29. Die Vertheilung der Elektrizität auf Oberflächen im Zustande des Gleichgewichts, insbesondere beim Ellipsoid. Anderer Beweis des Satzes über die Potentialfunction des Ellipsoids ausserhalb desselben	100
§ 30. Die Vertheilung der Elektrizität auf gegebenen Oberflächen, wenn dieselben mit der Erde in leitender Verbindung stehen und unter dem Einflusse inducirender Massen sich befinden. Lösung für den speciellen Fall einer Kugel und eines inducirenden Massenpunktes	104
§ 31. Fortsetzung und Lösung des allgemeinen Problems der beiden vorigen Paragraphen	108

III. Abtheilung.

Die hauptsächlichsten physikalischen Probleme,
welche sich auf die Theorie der Potentialfunction
stützen.

	Seite
§ 32. Die Entladung der Leydener Flasche und die hierdurch hervor- gebrachte lebendige Kraft	112
§ 33. Die Gestalt eines rotirenden homogenen flüssigen Körpers . .	115
§ 34. Die Gestalt eines rotirenden nichthomogenen flüssigen Körpers, insbesondere wenn die Rotationsgeschwindigkeit gering ist	121
§ 35. Die Excentricität der Schichten nimmt von innen nach aussen zu, wenn die Dichte von innen nach aussen abnimmt. Be- stimmung des Gesetzes der Dichte, wenn die Abplattung ge- geben ist	123
§ 36. Die Potentialfunction und Gestalt der Erde aus den an der Ober- fläche wirkenden Kräften berechnet. Das Clairaut'sche Theorem	126
§ 37. Präcession und Nutation der Erdachse	131
§ 38. Fortsetzung und Berechnung der Resultate	138
§ 39. Das Trägheitsmoment der Erde aus Präcession und Nutation be- rechnet	141
§ 40. Die Abplattung der Erde aus Präcession und Nutation unter der Voraussetzung der Flüssigkeit der innern Erdmasse berechnet	142
§ 41. Ebbe und Fluth. Wirkung von Ebbe und Fluth auf die Lage der Rotationsachse und die Rotationsgeschwindigkeit . . .	144
§ 42. Ueber die beiläufige Grösse der Verzögerung der Rotation durch Ebbe und Fluth	147
§ 43. Die Bewegung und Stellung der Mondachse. Muthmassungen über die Gestalt des Mondes	149
§ 44. Warum die Mondachse auf der Ekliptik senkrecht steht. Be- merkung über eine Störung der Mondbahn	152
§ 45. Ueber den Erdmagnetismus	155
§ 46. Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln im Zustande des Gleichgewichts. Anziehung und Abstossung derselben. Ver- vollständigung der Formel in § 32 über die Quantität der durch Entladung einer Leydener Flasche entwickelten leben- digen Kraft	158
§ 47. Das Problem des vorigen Paragraphen in seiner allgemeinen Fassung	165
§ 48. Theorie des inducirten Magnetismus nach Poisson	166

	Seite
§ 49. Wesentliche Lücke dieser Theorie	169
§ 50. Der inducirte Magnetismus ist von der Gruppierung der magnetischen Atome abhängig	173
§ 51. Betrachtungen über die Gruppierung der Atome und die davon abhängigen Constanten in der Gleichung des § 50	175
§ 52. Der inducirte Magnetismus der Kugel	179
§ 53. Der inducirte Magnetismus des Ellipsoids	180
§ 54. Modification, welche die bisher entwickelten Gesetze in der Natur erleiden	182



I. Abtheilung.

Die Principien der mathematischen Physik.

§ 1.

Die logischen Grundlagen der Physik.

Die oberste Hypothese der Physik ist, dass alle Veränderungen mit Nothwendigkeit geschehen; mit anderen Worten, dass zwischen den einzelnen Naturerscheinungen das Verhältniss von Ursache und Wirkung stattfindet. Die Veränderung der Dinge nennen wir Bewegung, die Ursache der Bewegung Kraft. Aufgabe der Physik ist also, die Bewegungen und die sie verursachenden Kräfte zu erforschen. — Physik und Mechanik sind identisch.

Das einfachste Ding ist der Punkt und wird also der nächste Gegenstand unserer Betrachtung. Wenn ich mir denke, dass sich ein Punkt bewegt, so muss ich mir wenigstens noch einen Punkt denken, in Bezug auf welchen er sich bewegt. Alle Bewegung ist also relativ. Wenn ich sage, ein Stein fällt in einer geraden Linie zur Erde, so ist dies nur dann richtig und hat nur dann einen Sinn, wenn ich von der relativen Bewegung des Steines in Bezug auf die als fest gedachte Erdoberfläche spreche, mathematisch ausgedrückt, wenn ich mir z. B. die zwei wagrechten Linien und die Kante einer Hausecke als rechtwinklige Coordinaten denke und auf diese die Bewegung beziehe. Denn denke ich mir die Erde rotirend, so beschreibt auch der fallende Stein keine gerade Linie mehr.

Die Geschwindigkeit ist der Grenzwert des Bruches, welchen man erhält, wenn man den Ort eines bewegten Punktes am Anfang und Ende eines Zeitmomentes bestimmt, die Entfernung dieser beiden Orte misst, mit dem Zeitmoment dividirt und dann dieses gleich Null werden lässt. Nun giebt es aber logisch kein absolutes Mass der Zeit;

der Begriff der Geschwindigkeit setzt jedoch, wenn er überhaupt ein bestimmter Begriff sein soll, ein solches voraus. Welches ist nun dieses Mass der Zeit? — Die Betrachtung der Natur zeigt uns, dass alle Körper, welche sich ohne Einwirkung einer Kraft bewegen, stets in gerader Linie fortschreiten, und dieser oberste Erfahrungssatz der Physik giebt uns als absolutes Mass der Zeit für die Physik den Weg, welchen ein ohne Kraft sich bewegender Körper zurücklegen würde. Aus dieser Definition der Zeit folgt zugleich, dass ein ohne Kraft sich bewegender Punkt stets gleiche Geschwindigkeit behält.

Man kann diesen Satz natürlich auch umkehren und aus dem Gesetze der Trägheit als absolutes Mass der Zeit den Weg folgern, welchen ein ohne Einwirkung einer Kraft sich bewegender Punkt zurücklegen würde.

Projicirt man die Bewegung eines Körpers auf die drei Achsen des rechtwinkligen Systems, so erhält man drei geradlinige Bewegungen. Jede Bewegung lässt sich also in drei geradlinige Bewegungen zerlegen. Findet die wirkliche Bewegung ohne Kraft, somit mit constanter Geschwindigkeit in constanter Richtung statt, so finden auch die drei projecirten Bewegungen mit constanter Geschwindigkeit statt. Man kann daher jede Bewegung, die ohne Kraft stattfindet, in drei Bewegungen zerlegen, die ohne Kraft stattfinden; findet die wirkliche Bewegung unter dem Einfluss einer, die Richtung und Geschwindigkeit verändernden Kraft statt, so verändert sich auch die Geschwindigkeit der drei projecirten Bewegungen. Oder analytisch ausgedrückt: Bewegt sich ein Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, ohne Kraft, so ist:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Sind diese Ausdrücke nicht gleich Null, so bewegt sich dieser Punkt unter dem Einflusse einer Kraft, deren Wirkungen diese drei Differenzialcoefficienten sind. Wir sagen absichtlich, dass diese Differenzialcoefficienten nur Wirkungen der Kraft sind. Wären sie die Kraft selber, so gäbe es auch negative Kräfte, die aber ebenso wenig existiren, als negative Dinge existiren.

1. Wenn wir einen Gegenstand in einem bewegten Eisenbahnzug fallen lassen, so bewegt er sich in Bezug auf diesen Eisenbahnzug gerade so, als ob dieser in Ruhe wäre. Aus dieser und ähnlichen Erscheinungen leiten wir den Satz ab, dass eine Kraft auf einen bewegten Punkt gerade so wirkt, wie auf einen ruhenden, mit anderen Worten, dass die Ausdrücke:

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2}$$

dieselben bleiben, welche Richtung und Geschwindigkeit der bewegte Punkt auch haben mag.

2. Wirken zwei Kräfte auf einen Punkt, welche einzeln die Wirkungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_1, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = b_1, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = c_1,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = b_2, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = c_2,$$

hervorbringen würden, so bringen sie beide vereint die Wirkung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a_1 + a_2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = b_1 + b_2, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = c_1 + c_2$$

hervor. Diese beiden Sätze sind Erfahrungssätze; denn logisch wäre auch möglich, dass die Wirkung einer Kraft mit einer gewissen Geschwindigkeit aufhören oder dass zwei Kräfte in ihrer Wirkung sich beeinträchtigen würden. — Den letzten Satz nennt man gewöhnlich den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. — Die Astronomie hat uns zuerst gezeigt, dass die Kräfte, welche zwischen den Massenpunkten wirken, stets dieselben sind, so oft diese dieselben Stellungen einnehmen und dass sie stets in der Richtung der Verbindungslinie dieser Massenpunkte wirken. Die gleiche Wahrnehmung machen wir bei allen irdischen Erscheinungen; hieraus hat die neuere Physik den allgemeinen Satz abgeleitet:

3. Man kann die Welt als ein System von Punkten ansehen, welche mit Kräften auf einander wirken, die nur von der Entfernung dieser Punkte abhängen und in der Richtung der Verbindungslinien thätig sind.

Wenn zwei Punkte in dieser Weise auf einander wirken, so verändern sie ihre Entfernung und die Erscheinung bleibt objectiv dieselbe, sei es dass wir den einen, oder den andern oder einen dritten in der Verbindungslinie liegenden Punkt als fest ansehen und auf diesen die Bewegungen beziehen. Diese Willkür hört aber auf, sobald mehr als zwei Punkte in Betracht gezogen werden; hat man z. B. drei Punkte a , b , c , von denen a weder auf b noch auf c wirkt, so ist offenbar, dass die Stellung der drei Punkte verschieden wird, je nach-

dem man b oder c als fest ansieht, sobald beide Punkte auf einander wirken. Wenn man daher das Gesetz aufstellt, dass alle Punkte auf einander wirken, so muss man zugleich auch denjenigen Punkt angeben, welcher bei der gegenseitigen Wirkung von zwei Punkten als fest angesehen werden muss.

4. Nun ziehen wir aus der Erfahrung den Schluss, dass dieser als fest anzusehende Punkt bei zwei gegebenen physischen Punkten deren Verbindungslinie immer in einem und demselben constanten Verhältniss theilt. Ist dieses Verhältniss z. B. gleich $a : b$, so verhalten sich auch die Zunahmen der Geschwindigkeiten wie $a : b$; denn wäre dies nicht der Fall, so würde dieser Punkt überhaupt nicht fest sein. Analytisch ausgedrückt heisst das: hat man für den einen Punkt:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a C_1, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = a C_2, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = a C_3,$$

so hat man für den andern:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -b C_1, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -b C_2, \quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} = -b C_3.$$

5. Ferner giebt uns die Erfahrung noch folgenden Satz: Ist das soeben definirte Verhältniss zwischen den Punkten 1 und 2 gleich $a : b$, zwischen den Punkten 1 und 3 gleich $a : c$, so ist es zwischen den Punkten 2 und 3 gleich $b : c$, u. s. f. für eine beliebige Anzahl von Punkten. Es existirt also in dieser Weise eine Verhältnisszahl, vermöge deren jeder Punkt auf einen einzigen bestimmten Punkt bezogen werden kann. Den reciproken Werth dieser Verhältnisszahl nennen wir Masse.

Bezeichnet man die Massen zweier Punkte durch m_1 und m_2 und durch $f(r)$ eine beliebige Function der Entfernung r zwischen beiden Punkten, so haben wir daher für beide Punkte:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} f(r) \cos(rx); \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{1}{m_2} f(r) \cos(rx)$$

[wenn wir mit (rx) den Winkel der beiden Richtungen r und x bezeichnen].

6. Die Function $f(r)$ hängt von der Entfernung der beiden Punkte und deren individuellen Eigenschaften ab. Nun giebt uns aber die Erfahrung den weitem Satz, dass alle diese Functionen, welche die Bewegungen der Punkte bestimmen, sich in Gattungen von der Form $m_1 m_2 f(r)$ theilen, so dass jeder einzelnen

Gattung von Kräften ein eigenes $f(r)$ entspricht. So bilden z. B. die Schwerkkräfte eine besondere Gattung von Kräften, für welche man hat:

$$\frac{m_1 d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{r^2} \cos(rx); \quad \frac{m_2 d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{m_1 m_2}{r^2} \cos(rx).$$

Der Ausdruck $\frac{m d^2 x}{dt^2}$ stellt nicht die Kraft selbst, sondern nur deren Wirkung vor. Doch wird er gewöhnlich als beschleunigende Kraft oder als Kraft kurzweg bezeichnet, welche Ausdrucksweise auch beibehalten werden soll.

Wenn wir einen Körper bewegen wollen und auf diesen eine beschleunigende Kraft wirkt, so ist eine gewisse Anstrengung, eine Arbeit erforderlich. Diese hängt erfahrungsgemäss nur von der Grösse der Kraft und der Strecke des Weges ab, den wir in der Richtung der Kraft, dieser entgegengesetzt, zurückgelegt haben. Wir definiren daher die Arbeit eines Punktes in Bezug auf eine Kraft als das Product dieser Kraft und der negativen Projection des von dem Punkte zurückgelegten Weges auf die Richtung dieser Kraft.

Hiermit haben wir die allgemeinen Sätze, welche der mathematischen Physik zu Grunde liegen, kennen gelernt. Sie sind alle Consequenzen eines einzigen Principes, welches man etwa so ausdrücken kann:

Die Natur befolgt bei ihren Veränderungen diejenigen Gesetze, die unserem Verstande am einfachsten und fasslichsten erscheinen. — Wir lassen kein Naturgesetz für wahr gelten, wenn es nicht diesen Anforderungen entspricht, und wäre es auch durch viele Versuche erprobt, während wir uns andererseits schon mit wenigen und ungenauen Versuchen genügen lassen, wenn nur das aus diesen Versuchen abgeleitete Gesetz einfach und fasslich ist. So sehr sind wir von der Richtigkeit dieses Principes durchdrungen, dass wir sogar in der Sprache des gewöhnlichen Lebens einfach und natürlich für zwei gleichbedeutende Begriffe ansehen.

§ 2.

Einige analytische Hülfsätze.

1. Sind die rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte a, b, c und x, y, z , so ist ihre Entfernung gleich:

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.$$

Nennt man r die Entfernung des Punktes a, b, c vom Coordinatencentrum und ϱ die Entfernung des andern Punktes von diesem Centrum, so ist die Entfernung der beiden Punkte gleich:

$$\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2(ax + by + cz)}.$$

Nun bilden die Linien r und ϱ sowie die Entfernung der beiden Punkte ein Dreieck, und bezeichnet man den von den Seiten r und ϱ eingeschlossenen Winkel mit $(r\varrho)$, so hat man nach der Trigonometrie:

$$r\varrho \cos(r\varrho) = ax + by + cz$$

und

$$\cos(r\varrho) = \frac{a}{r} \cdot \frac{x}{\varrho} + \frac{b}{r} \cdot \frac{y}{\varrho} + \frac{c}{r} \cdot \frac{z}{\varrho}.$$

Bezeichnet man die drei Richtungen der Coordinatenachsen einfach durch x, y, z , so hat man auch:

$$\cos(r\varrho) = \cos(rx) \cos(\varrho x) + \cos(ry) \cos(\varrho y) + \cos(rz) \cos(\varrho z).$$

2. Den sehr häufig vorkommenden Ausdruck:

$$[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

bezeichnet man in der Regel einfach durch T . Dieser Ausdruck ist nach dem vorigen gleich:

$$T = [r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(r\varrho)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist die Summe von drei Quadraten, also immer positiv; es ist daher auch:

$$r^2 + \varrho^2 > 2r\varrho \cos(r\varrho)$$

und man sieht hieraus, dass sich T nach dem binomischen Satze in eine immer convergirende Reihe auflösen lässt, welche nach den positiven ganzen Potenzen von $r\varrho \cos(r\varrho)$, nach den negativen gebrochenen Potenzen von $r^2 + \varrho^2$ fortschreitet.

Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Ist $r > \varrho$, so lassen sich die negativen Potenzen von $r^2 + \varrho^2$ wieder in convergente Reihen verwandeln, welche nach den positiven Potenzen von ϱ und nach den negativen Potenzen von r fortschreiten und ebenso umgekehrt, wenn $\varrho > r$. Um diese Reihen zu erhalten, kann man setzen:

$$T = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2\varrho}{r} \cos(r\varrho) + \frac{\varrho^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \text{ für } r > \varrho,$$

$$T = \frac{1}{\varrho} \left[1 - \frac{2r}{\varrho} \cos(r\varrho) + \frac{r^2}{\varrho^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \text{ für } \varrho > r.$$

Hieraus sieht man, dass man hat:

$$T = \frac{T_0}{r} + \frac{T_1 \varrho}{r^2} + \frac{T_2 \varrho^2}{r^3} \dots \text{für } r > \varrho,$$

$$T = \frac{T_0}{\varrho} + \frac{T_1 r}{\varrho^2} + \frac{T_2 r^2}{\varrho^3} \dots \text{für } \varrho > r,$$

wobei die Ausdrücke $T_0, T_1, T_2 \dots$ in beiden Reihen gleich sind und aus ganzen positiven Potenzen von $\cos(r\varrho)$ bestehen. Um diese Potenzen zu erhalten, setzen wir $\frac{\varrho}{r} = q$ und $\cos(r\varrho)$ bezeichnen wir einfach durch $\cos$ und erhalten so:

$$[1 - (2q \cos - q^2)]^{-\frac{1}{2}} = \sum^n \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} (2q \cos - q^2)^n,$$

$$(2q \cos - q^2)^n = \sum^m \frac{1 \cdot 2 \dots n}{1 \dots m \cdot 1 \dots (n-m)} \cdot (-1)^m \cdot 2^{n-m} \cdot q^{n+m} \cos^{n-m},$$

also:

$$r T = \sum \sum \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2m \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-m)} \cdot (-1)^m q^{n+m} \cos^{n-m}.$$

Fasst man nun alle Glieder zusammen, welche q in der gleichen Potenz s haben, so wird die Doppelsumme eine einfache Summe. Setzt man nämlich $n + m = s$, so hat man $n = s - m$ und

$$\text{a) } T_s = \sum \frac{1 \cdot 3 \dots 2(s-m)-1}{2 \cdot 4 \dots 2m \cdot 1 \cdot 2 \dots (s-2m)} \cdot (-1)^m \cos^{s-2m},$$

wobei nur m veränderlich ist und alle Werthe bis zu $\frac{s}{2}$ durchläuft.

Wir haben hiernach:

$$T_0 = 1,$$

$$T_1 = \cos,$$

$$T_2 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cos^2 - \frac{1}{2},$$

$$T_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cos,$$

$$T_4 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 2} \cos^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},$$

$$T_5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 1} \cos.$$

Der Ausdruck T lässt sich auch noch in anderer Weise in eine convergente Reihe auflösen. Nach dem Taylor'schen Satze ist:

$$f(a+x, b) = f(a, b) + \frac{df(a, b)}{da} \cdot x + \frac{d^2 f(a, b)}{da^2} \frac{x^2}{2} \dots$$

oder kürzer:

$$f(a+x, b) = \sum \frac{d^l f(a, b)}{da^l} \cdot \frac{x^l}{1 \cdot 2 \dots l}.$$

Ebenso hat man:

$$f(a+x, b+y) = \sum \frac{d^m f(a+x, b)}{db^m} \cdot \frac{y^m}{1 \cdot 2 \dots m}.$$

Nun ist aber:

$$f(a+x, b) = \sum \frac{d^l f(a, b)}{da^l} \frac{x^l}{1 \cdot 2 \dots l},$$

also:

$$f(a+x, b+y) = \sum \sum \frac{d^{l+m} f(a, b)}{da^l db^m} \frac{x^l y^m}{1 \dots l \cdot 1 \dots m}.$$

Dieselbe Regel ist für drei und mehr Unbekannte anwendbar; man hat daher:

$$T = \sum \sum \sum \frac{d^{l+m+n} f(a, b, c)}{da^l db^m dc^n} \frac{(-x)^l (-y)^m (-z)^n}{1 \dots l \cdot 1 \dots m \cdot 1 \dots n} \text{ für } r > \varrho,$$

$$T = \sum \sum \sum \frac{d^{l+m+n} f(a, b, c)}{dx^l dy^m dz^n} \frac{(-a)^l (-b)^m (-c)^n}{1 \dots l \cdot 1 \dots m \cdot 1 \dots n} \text{ für } \varrho > r.$$

3. Im Verlaufe unserer Darstellung werden wir häufig auf das Integral

$$\int x^{2p} y^{2q} z^{2r} d\omega$$

stossen, in welchem x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Oberfläche einer Kugel bedeuten, deren Radius gleich 1 ist, deren Oberflächendifferenzial durch $d\omega$ dargestellt wird und wobei sich die Integration über die ganze Kugeloberfläche erstreckt. Dieses Integral lautet im sphärischen Coordinatensystem:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\xi (\sin \xi \cos \varphi)^{2p} (\sin \xi \sin \varphi)^{2q} (\cos \xi)^{2r} \sin \xi$$

und ist gleich:

$$4\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2q-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2r-1)}{3 \cdot 5 \dots [2(p+q+r)+3]},$$

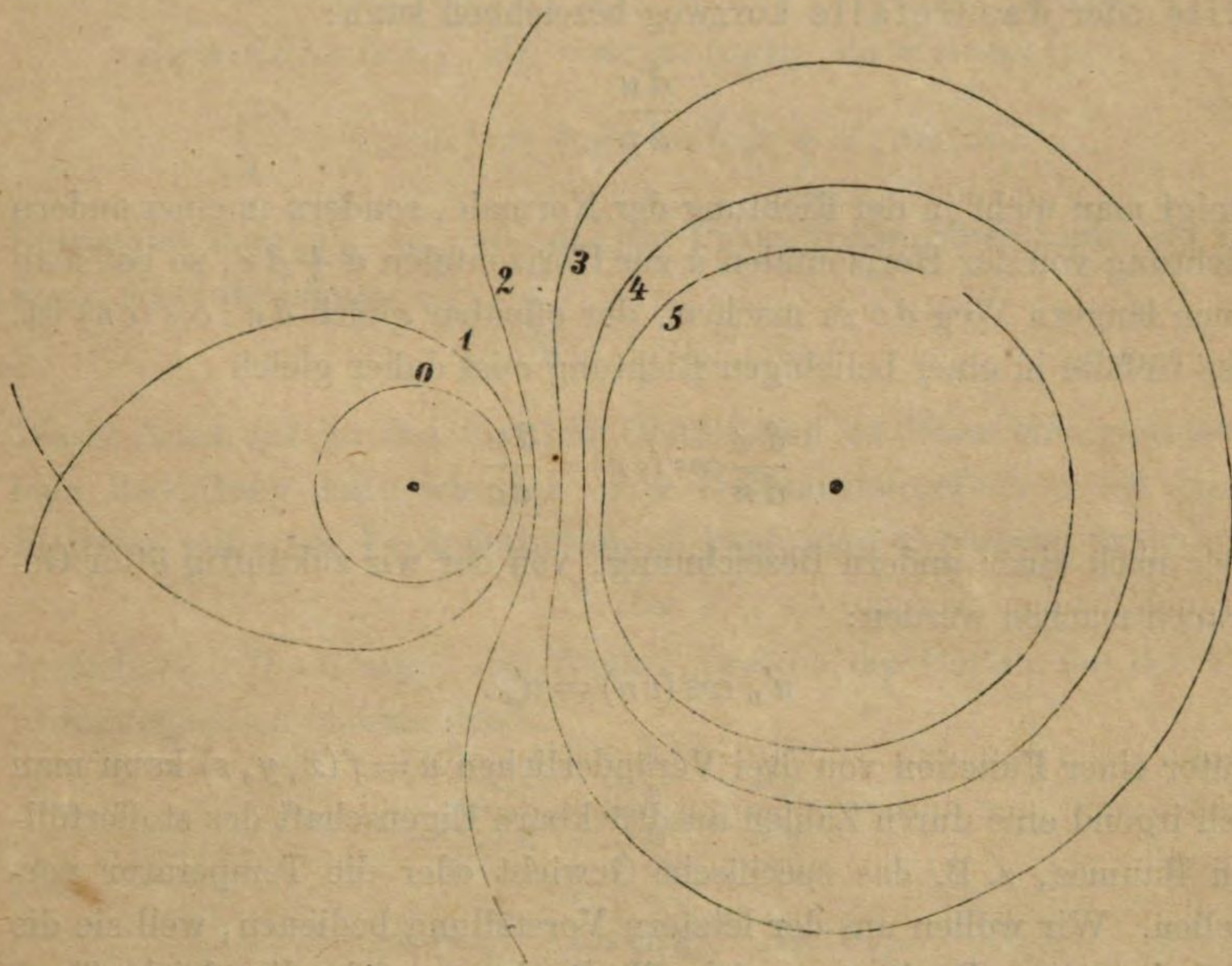
wie man leicht findet, wenn man dieses Integral nach den bekannten Formeln berechnet.

§ 3.

Das Gefälle der Functionen.

Unter einer Function von zwei beliebigen Veränderlichen $u=f(x,y)$ kann man sich die Gestalt eines Berges z. B. in der Art vorstellen, dass

Fig. 1.



die Function u die Erhebung des in der Horizontalprojection durch die Coordinaten x und y bezeichneten Punktes über die Horizontalebene bezeichnet. Die Gleichung

$$f(x,y)=C$$

drückt alsdann eine Linie auf der Oberfläche des Berges aus, welche überall in gleicher Höhe über der Horizontalebene sich befindet, und setzt man nach und nach $C=1, 2, 3 \dots$, so hat man ein System von Linien, welches ein Bild von der Oberfläche des Berges giebt. So z. B. die Linien auf Figur 1. Sie bezeichnen einen Berg und ein daneben

liegendes Thal. Denkt man sich zwei dicht auf einander folgende Horizontallinien, deren Gleichungen sind:

$$u = f(x, y),$$

$$u + du = f(x, y),$$

so ist das stärkste Gefälle (der Weg, den das herabfließende Wasser verfolgt) offenbar in der Richtung, welche auf den beiden aufeinanderfolgenden Horizontallinien senkrecht steht. Bezeichnet man diese Richtung (die Richtung der Normale der Horizontallinie) mit n , das kleine Stück der Normale zwischen den beiden Horizontallinien mit dn , so ist das stärkste Gefälle, das man auch passend als das absolute Gefälle oder das Gefälle kurzweg bezeichnen kann:

$$\frac{du}{dn}.$$

Steigt man nicht in der Richtung der Normale, sondern in einer andern Richtung von der Horizontalen u zur Horizontalen $u + du$, so hat man einen längern Weg dc zu machen, der offenbar gleich $dn : \cos(cn)$ ist. Das Gefälle in einer beliebigen Richtung c ist daher gleich

$$\frac{du}{dn} \cos(cn) = \frac{du}{dc}$$

oder nach einer andern Bezeichnung, von der wir zukünftig öfter Gebrauch machen werden:

$$u'_n \cos(cn) = u'_c.$$

Unter einer Function von drei Veränderlichen $u = f(x, y, z)$ kann man sich irgend eine durch Zahlen ausdrückbare Eigenschaft des stoff erfüllten Raumes, z. B. das specifische Gewicht oder die Temperatur vorstellen. Wir wollen uns der letztern Vorstellung bedienen, weil sie die einfachste ist. Denkt man sich alle Punkte, welche die gleiche Temperatur c besitzen, mit einander verbunden, so erhält man eine Fläche, deren Gleichung ist:

$$c = f(x, y, z).$$

Sowie nun das Wasser immer in der Richtung der Normale der Horizontallinien fließt, so bewegt sich auch die Wärme offenbar in der Richtung der Normale der durch obige Gleichung charakterisirten Flächen, die man passend Gleichflächen nennen kann. Die Schnelligkeit, mit welcher die Wärme sich bewegt, wird man eben so passend das Gefälle nennen und analytisch durch:

$$\frac{du}{dn} = u'_n$$

bezeichnen. Das Gefälle in einer beliebigen Richtung c wird alsdann sein:

$$\frac{du}{dc} = \frac{du}{dn} \cos(cn).$$

Das Gesagte lässt sich auch leicht analytisch nachweisen. Bezeichnen x, y, z drei beliebige auf einander senkrechte Richtungen und c eine beliebige vierte Richtung, und $u + du$ den Werth, welchen u erhält, wenn man von dem Punkte, der durch die Coordinaten x, y, z bezeichnet wird, in der Richtung c um dc fortschreitet, so hat man:

$$dx = dc \cos(cx); \quad dy = dc \cos(cy); \quad dz = dc \cos(cz);$$

$$\frac{du}{dc} = u'_x \cos(cx) + u'_y \cos(cy) + u'_z \cos(cz).$$

Betrachtet man u'_x, u'_y, u'_z als die Projectionen einer Linie, so ist deren absolute Länge:

$$\sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}.$$

Dieser Ausdruck ist das absolute Gefälle und da dieses eine ganz analoge Bedeutung hat, wie der erste Differenzialcoefficient bei einer Function mit einer Veränderlichen, so kann man es passend durch:

$$\Delta u$$

bezeichnen. Die Cosinus der Winkel, welche das Gefälle mit den Coordinatenachsen macht, sind:

$$\frac{u'_x}{\Delta u}, \quad \frac{u'_y}{\Delta u}, \quad \frac{u'_z}{\Delta u}$$

oder:

$$\cos(nx), \quad \cos(ny), \quad \cos(nz).$$

Man hat daher nach § 2:

$$u'_c = \Delta u \cos(cn).$$

Ist z. B. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$, so ist das absolute Gefälle gleich 1, weil $dr = du$ wird, das Gefälle in der Richtung c ist also:

$$\frac{dr}{dc} = \cos(rc),$$

wie man sich auch leicht durch eine einfache geometrische Betrachtung überzeugt, indem man den Endpunkt des Radius r in einer beliebigen Richtung c um dc verrückt.

Bisher haben wir angenommen, dass die Function u durch die einfache Gleichung:

$$u = f(x, y, z)$$

gegeben sei. Die Function u kann aber auch durch die unentwickelte Gleichung

$$f(x, y, z, u) = 0$$

gegeben sein. Als einfaches Beispiel nehmen wir die Gleichung der Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Hier ist r der Radius der Kugel; lässt man r wachsen, so erhält man ein System von concentrischen Kugelflächen. Solche Ausdrücke in der Gleichung einer Fläche, welche keine Coordinaten, sondern nur allgemeine Eigenschaften der durch die Coordinaten bezeichneten Fläche ausdrücken, nennt man Parameter. Eine Fläche kann auch mehrere Parameter besitzen. So sind z. B. in der Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} - 1 = 0$$

die Ausdrücke p, q, r , welche die Achsen bedeuten, Parameter.

Aus der unentwickelten Gleichung:

$$f(x, y, z, p) = 0$$

erhält man:

$$f'_p dp + f'_x dx = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = p'_x = -f'_x : f'_p \text{ u. s. f.}$$

und hieraus:

$$\Delta p = \frac{1}{f'_p} \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2}.$$

So hat man z. B. aus der Gleichung:

$$p - \frac{1}{r} = 0$$

oder:

$$p^2 (x^2 + y^2 + z^2) - 1 = 0,$$

$$f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2 = 4p^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$f'_p = 2p (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\Delta p = \frac{p}{r} = \pm \frac{1}{r^2}.$$

Das richtige Vorzeichen ist negativ, weil p bei wachsenden r abnimmt. Man hat also, wie man direct natürlich auch einfacher finden würde:

$$\Delta p = -\frac{1}{r^2}.$$

§ 4.

Die Coordinatensysteme.

In jedem ebenen Coordinatensystem ist ein Punkt durch zwei sich durchschneidende Linien und in jedem räumlichen Coordinatensystem durch drei sich schneidende Flächen bestimmt. Im gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensystem sind diese drei Flächen Ebenen, im sphärischen Coordinatensystem ist eine dieser Flächen eine Kugel vom Radius r , die zweite ein Kreiskegel mit der Winkelöffnung ζ , die dritte eine Meridianebene, welche mit einer gegebenen festen Ebene den Winkel φ macht. Die Gleichungen dieser drei Flächen im rechtwinkligen Coordinatensystem sind:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \zeta = 0,$$

$$y - x \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Bei diesen drei Flächen sind r, ζ, φ Parameter. Sind p, q, r die Parameter eines beliebigen Coordinatensystems und bezeichnet man mit $dn p, dn q, dn r$ die kleinen Stücke der Normalen zwischen den beiden Flächen p und $p + dp, q$ und $q + dq, r$ und $r + dr$, so hat man:

$$\frac{dn p}{dp} = \Delta p \text{ u. s. f.}$$

Ist das Coordinatensystem orthogonal, so ist das räumliche Element ein rechtwinkliges Parallelepipedium und wird gleich:

$$\frac{dp dq dr}{\Delta p \Delta q \Delta r}.$$

§ 5.

Die Trajectorien.

Aus dem Gesagten sieht man, dass die Lösung der Aufgabe, zu einer Schaar von Flächen zwei andere Schaaren von Flächen zu finden, die so beschaffen sind, dass sich alle drei überall rechtwinklig durch-

schneiden, von Interesse ist. Für den Raum wird die Aufgabe unbestimmt. Für unsern Zweck genügt es, wenn wir die Aufgabe für die Ebene lösen, wo sie auch bestimmt wird.

Ist eine Schaar von Linien durch die Gleichung

$$c = f(x, y)$$

gegeben, so lautet die Differenzialgleichung dieser Linien:

$$\frac{dc}{dx} dx + \frac{dc}{dy} dy = 0.$$

Nun sind dx und dy die Projectionen eines Elementes der Linie c ; bezeichnet man die Projectionen des Elementes der Trajectorie mit dx' und dy' , so hat man als Bedingung, dass diese Elemente auf einander senkrecht stehen (§ 2):

$$dx dx' + dy dy' = 0,$$

wodurch sich:

$$dx' : dy' = \frac{dc}{dx} : \frac{dc}{dy}$$

als Differenzialgleichung der Trajectorienschaar ergibt. Ist die Schaar der Trajecten nicht durch das rechtwinklige System, sondern durch ein beliebiges Coordinatensystem p, q bestimmt, so dass

$$p = f(x, y), \quad q = \varphi(x, y)$$

zwei sich schneidende Curvensysteme darstellen, und ist:

$$c = f(p, q)$$

die Gleichung der Curvenschaar, deren Trajectorien man finden will, so hat man für diese Curvenschaar:

$$a) \quad \frac{dc}{dp} dp + \frac{dc}{dq} dq = 0$$

als Differenzialgleichung. Diese Gleichung bestimmt dq , wenn dp gegeben ist und umgekehrt (Fig. 2). Die Richtung der Trajecte ist durch die Durchschnittspunkte p, q und $p + dp, q + dq$ gegeben. Dreht man nun die ganze Figur unverändert um den Punkt p, q um einen bestimmten Winkel, z. B. einen rechten Winkel, und bezeichnet man die neuen Linien zum Unterschied von den vorigen durch Komma, so kann man die Linien $p' q'$ als einem neuen Coordinatensystem angehörig ansehen, in der Weise, dass das System p' das System p und das

System q' das System q rechtwinklig (oder unter einem andern gegebenen Winkel) durchschneidet. Die Gleichung a) bestimmt die Richtung der Trajecte durch das Verhältniss $dp : dq$. Das Parallelogramm, dessen Diagonale die Richtung der Trajecte angiebt, ist aber auch durch das Verhältniss $dnp : dnq$ bestimmt. Nun ist:

$$dnp = \frac{dp}{\Delta p}, \quad dnq = \frac{dq}{\Delta q};$$

man hat daher für die Trajecte:

$$\frac{dc}{dp} \Delta p dnp + \frac{dc}{dq} \Delta q dnq = 0.$$

Das Verhältniss $dnp : dnq$ muss aber, wenn beide Parallelogramme ähnlich sein sollen, gleich $dnp' : dnq'$ sein. Man hat daher schliesslich als Differenzialgleichung der Trajectorienschaar:

$$b) \quad \frac{dc}{dp} \frac{\Delta p}{\Delta p'} dp' + \frac{dc}{dq} \frac{\Delta q}{\Delta q'} dq' = 0.$$

Wenn z. B. die Coordinaten p und q das Bipolarsystem bezeichnen, so bezeichnen die Coordinaten p' und q' , welche die Coordinaten p und q rechtwinklig durchschneiden, zwei Radienbüschel, welche von den beiden Polen ausgehen. Man kann unter p' und q' z. B. die Winkel verstehen, welche die Radien p und q mit der Verbindungslinie der Pole einschliessen. Nun ist das Gefälle des Systems $p = 1$; denn lässt man p um dp wachsen, so wächst auch dnp um dp ; ebenso ist das Gefälle von $q = 1$; ferner ist $\Delta p' = \frac{1}{p}$; denn wenn man p' um dp' wachsen

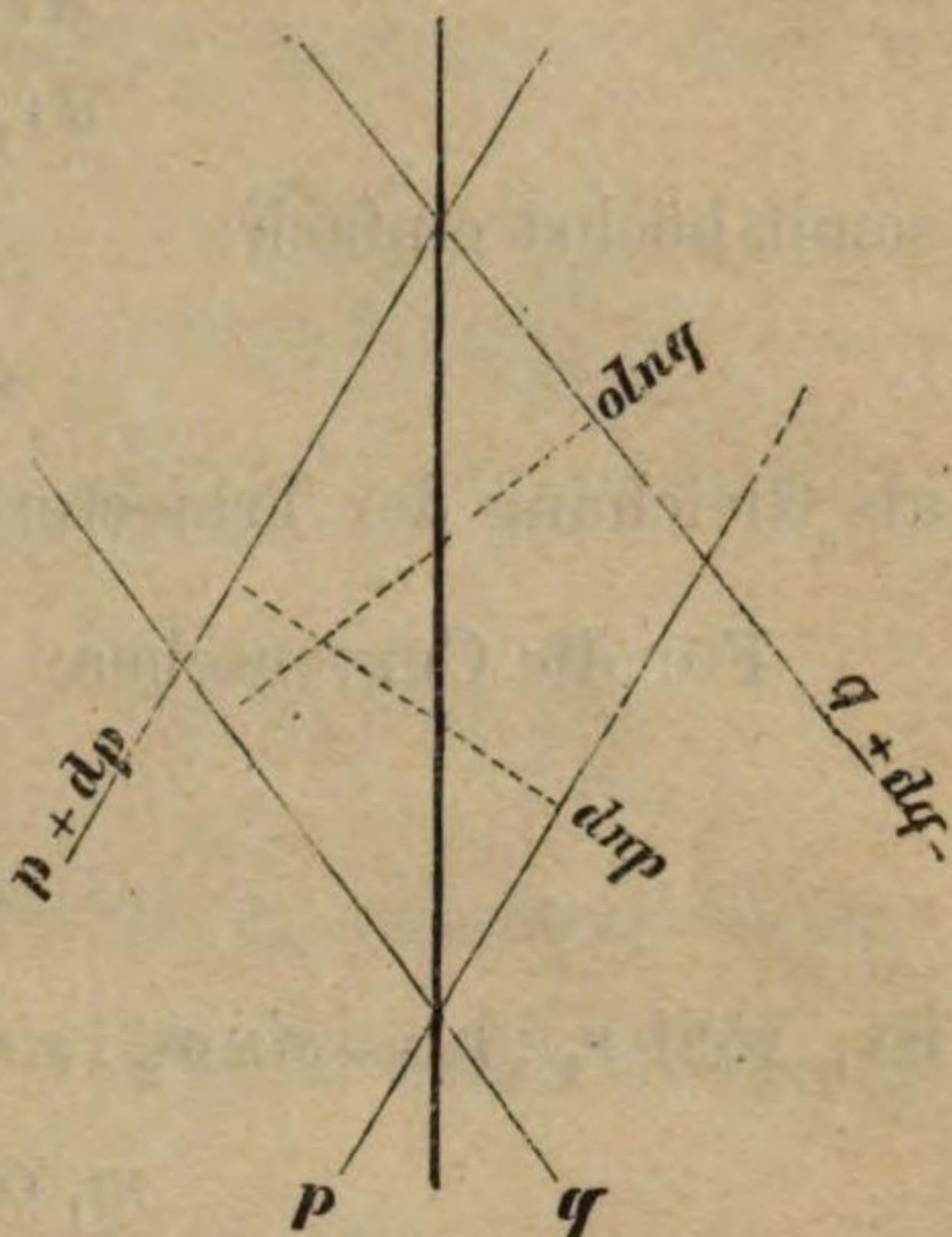
lässt, so wächst dnp' um $p dp'$; ebenso ist $\Delta q' = \frac{1}{q}$. Man hat daher für die Trajectorien des Bipolarsystems, wenn man ferner wie gewöhnlich $p = r_1$, $q = r_2$; $p' = \varphi_1$, $q' = \varphi_2$ setzt:

$$r_1 \frac{dc}{dr_1} d\varphi_1 + r_2 \frac{dc}{dr_2} d\varphi_2 = 0$$

als Differenzialgleichung der Trajectorienschaar. Die Gleichung der Lemniscate z. B. ist:

$$c = r_1 r_2;$$

Fig. 2.



hieraus hat man:

$$\frac{dc}{dr_1} = r_2; \quad \frac{dc}{dr_2} = r_1,$$

somit höchst einfach:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \text{Const.}$$

als Gleichung der Trajectorienschaar.

Für die Curvenschaar

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = c$$

ist, weil $r_1 : r_2 = \sin \varphi_2 : \sin \varphi_1$, die Gleichung der Trajectorienschaar:

$$m_1 \cos \varphi_1 - m_2 \cos \varphi_2 = c$$

(Fig. 1 vergl. § 30).

§ 6.

Definition der Kraftfunction, der Potentialfunction und des Potentials. Haupteigenschaften desselben.

Ist die Entfernung zweier Punkte m_1 und m_2 gleich r_{12} und sind die Coordinaten dieser Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 , so ist:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \end{aligned}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Linie r mit den Coordinatenachsen macht, sind:

$$\frac{x_2 - x_1}{r}; \quad \frac{y_2 - y_1}{r}; \quad \frac{z_2 - z_1}{r}$$

oder:

$$\frac{dr}{dx_2}; \quad \frac{dr}{dy_2}; \quad \frac{dr}{dz_2},$$

wenn man die Linie r in der Richtung von m_1 zu m_2 nimmt, und

$$\frac{x_1 - x_2}{r}; \quad \frac{y_1 - y_2}{r}; \quad \frac{z_1 - z_2}{r}$$

oder:

$$\frac{dr}{dx_1}; \quad \frac{dr}{dy_1}; \quad \frac{dr}{dz_1},$$

wenn man diese Linie in der Richtung von m_2 zu m_1 nimmt.

Ist nun die durch $m_1 m_2 f(r)$ ausgedrückte Kraft abstossend, so geht die auf m_1 wirkende Kraft von m_2 zu m_1 , es sind also die Projectionen der auf m_1 wirkenden Kraft:

$$m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dx_1}; \quad m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dy_1}; \quad m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dz_1},$$

ebenso die Projectionen der auf m_2 wirkenden Kraft:

$$m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dx_2}; \quad m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dy_2}; \quad m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dz_2}.$$

Da nach § 3, wenn c eine beliebige vom Punkt m_1 ausgehende Richtung bedeutet, $\cos(cr) = \frac{dr}{dc_1}$ ist, so ist die auf m_1 in dieser Richtung wirkende Kraft gleich

$$m_1 m_2 f(r) \frac{dr}{dc_1}.$$

Bezeichnet man das nach r gerechnete unbestimmte Integral von f mit F , so hat man für diese Kraft den Ausdruck:

$$m_1 m_2 d \frac{F(r)}{dc_1} = m_2 \frac{d^2 c_1}{dt^2}.$$

Man hat also die beschleunigende Kraft des Punktes m_1 in der Richtung c_1 , wenn man die Kraftfunction $m_1 m_2 F(r)$ in dieser Richtung differenzirt. Wirken mehrere Punkte auf einander, so hat man:

$$m_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} = m_1 \frac{d}{dc_1} \left[m_2 F(r_{12}) + m_3 F(r_{13}) \dots \right].$$

Den eingeklammerten Ausdruck, welcher, nach einer beliebigen Richtung differenzirt, die Zunahme der Geschwindigkeit des Punktes m_1 angiebt, nennt man die Potentialfunction der Punkte $m_2, m_3 \dots$

Hierbei sind die Punkte m_2, m_3 als fest, der Punkt m_1 aber als beweglich gedacht, so dass die Potentialfunction als eine Function der drei Coordinaten des beweglichen Punktes m_1 erscheint. Hat man z. B. zwei feste Punkte mit den Coordinaten $x_1 y_1 z_1; x_2 y_2 z_2$, so ist deren Potentialfunction:

$$m_1 F[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2] \\ + m_2 F[(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2]$$

und zeigt nach der Richtung x z. B. differenzirt an, welche Kraft in der Richtung x auf die im Punkt $x y z$ befindliche Masseneinheit von

den Punkten m_1 und m_2 aus einwirkt. Die Kräfte, welche auf die einzelnen Punkte $m_1 m_2 m_3$ des Systems einwirken, heissen:

$$m_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} = \frac{d}{dc_1} \left[m_1 m_2 F(r_{12}) + m_1 m_3 F(r_{13}) \dots \right],$$

$$m_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} = \frac{d}{dc_2} \left[m_2 m_1 F(r_{21}) + m_2 m_3 F(r_{23}) \dots \right].$$

Da nun $\frac{d}{dc_1} F(r_{23}) = \frac{d}{dc_2} F(r_{13})$ u. s. f. $= 0$ ist, weil $F(r_{23})$ nur von den Coordinaten der Punkte m_2 und m_3 abhängt, so kann man auch setzen:

$$\text{a) } m_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} = \frac{d}{dc_1} \left[m_1 m_2 F(r_{12}) + m_1 m_3 F(r_{13}) + m_2 m_3 F(r_{23}) \dots \right]$$

u. s. f.

Den eingeklammerten Ausdruck, welcher, nach den Coordinaten eines beliebigen Punktes des Systems differenzirt, die auf diesen Punkt wirkende Kraft anzeigt, nennt man das Potential des Massensystems m_1, m_2, m_3 . Es ist die Summe aller einzelnen im Systeme wirkenden Kraftfunctionen.

Die Gleichung a) ist der analytische Ausdruck aller der Sätze, welche wir als die Grundsätze der mathematischen Physik in § 1 bezeichnet haben. Diese Gleichung zeigt nämlich an:

dass zwischen den einzelnen Kräften der Zusammenhang stattfindet, den wir kurz durch Masse bezeichnen;

dass die Massen constant sind;

dass die Kräfte zwischen den einzelnen Massenpunkten in der Richtung der Verbindungslinien nach beiden Seiten gleich, aber entgegengesetzt wirken;

dass die einzelnen Kräfte sich nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte zusammensetzen.

Die Arbeit eines Punktes ist nach der in § 1 gegebenen Definition während eines Zeitmoments dt , wenn man die Arbeit mit A und den Weg mit s bezeichnet, gleich

$$dA = - \text{Kraft } ds \cos (\text{Kraft } ds).$$

Nun sind die Projectionen der Kraft, wenn man das Potential einfach mit P bezeichnet, gleich:

$$\frac{dP}{dx_1}, \quad \frac{dP}{dy_1}, \quad \frac{dP}{dz_1},$$

und die Projectionen des Weges gleich:

$$dx_1, \quad dy_1, \quad dz_1.$$

Man hat daher:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -m_1 \left(\frac{dx_1}{dt} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt} \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{dz_1}{dt} \frac{d^2z_1}{dt^2} \right) \\ &= - \left(\frac{dP}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dP}{dy_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{dP}{dz_1} \frac{dz_1}{dt} \right), \\ \frac{dA_2}{dt} &= - \left(\frac{dP}{dx_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{dP}{dy_2} \frac{dy_2}{dt} + \frac{dP}{dz_2} \frac{dz_2}{dt} \right) \\ &\quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Nun ist der eingeklammerte Ausdruck gleich $\frac{dv_1^2}{2dt^2}$, wenn man die Geschwindigkeit mit v bezeichnet. Berechnet man in gleicher Weise alle Arbeiten der einzelnen Punkte des Systems, so hat man für die Summe der eingeklammerten Ausdrücke einfach $\frac{dP}{dt}$.

Man hat daher durch Integration:

$$\Delta \Sigma A = - \Delta \Sigma \frac{mv^2}{2} = - \Delta P.$$

Den Ausdruck $\frac{mv^2}{2}$ nennt man die lebendige Kraft des Punktes m .

1. Die Zunahme der gesammten Arbeit eines Massensystems ist also gleich der Abnahme der gesammten lebendigen Kraft, gleich der Abnahme des Potentials.

Das Potential hängt nur von den Massen und gegenseitigen Stellungen der einzelnen Punkte ab. So oft also die Punkte ihre ursprüngliche Stellung zu einander wieder einnehmen, ist auch die gesammte lebendige Kraft wieder dieselbe. Man nennt diesen Satz das Princip der Erhaltung der Kraft.

2. Im Falle des Gleichgewichts sind alle Kräfte gleich Null, also auch $\frac{dA}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0$, welche Geschwindigkeiten man auch den einzelnen Punkten ertheilen mag.

Man nennt diesen letztern Satz, welcher zur Lösung verschiedener Probleme des Gleichgewichts dienen kann, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

3. Im Falle des absoluten oder stabilen Gleichgewichts ist das Potential ein absolutes Maximum; denn das stabile Gleichgewicht charakterisirt sich dadurch, dass das System keine Bewegung aus sich erzeugen und eine von aussen mitgetheilte Kraft nie grösser werden kann.

§ 7.

Allgemeine Sätze über die Potentialfunction.

1. Wie wir oben gesehen haben, ist die Potentialfunction des Massensystems $m_1, m_2, m_3 = m_1 F(r_1) + m_2 F(r_2) + m_3 F(r_3)$, wenn man mit r_1, r_2, r_3 die Entfernungen der Punkte m_1, m_2, m_3 von dem Punkte bezeichnet, für welchen man die Potentialfunction dieses Massensystems aufsuchen will. Will man aber für einen der Punkte m_1, m_2, m_3 selbst die Potentialfunction aufsuchen, so muss man diesen Punkt ausser Rechnung lassen. Wenn man diese Regel beachtet und die Potentialfunction einfach mit V bezeichnet, so hat man z. B. für drei Punkte

$$\begin{aligned} & m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3 \\ &= m_1 m_2 F(12) + m_1 m_3 F(13) \\ &+ m_2 m_1 F(12) + m_2 m_3 F(23) \\ &+ m_3 m_1 F(13) + m_3 m_2 F(23) = 2P, \\ &2P = \Sigma m V. \end{aligned}$$

2. Ist die Anzahl der Massenpunkte sehr gross und denkt man sie sich so gruppirt, dass sie sich in den Ecken der Parallelepipeda befinden, in welche der Raum eingetheilt wird, wenn man in den Entfernungen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ parallele Ebenen legt, so kommt auf jedes einzelne Parallelepipedium ein Massenpunkt m_{xyz} . Die Dichtigkeit der Masse ist daher gleich $s = \frac{m_{xyz}}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ oder $m_{xyz} = s \Delta x \Delta y \Delta z$ und man hat:

$$V = \Sigma \Delta x \Delta y \Delta z \cdot s \cdot F[(l \Delta x - x_1)^2 + (m \Delta y - y_1)^2 + (n \Delta z - z_1)^2].$$

Die Summe ist eine dreifache Summe, in welcher l, m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen. Lässt man die Zwischenräume verschwindend klein werden, so hat man:

$$V = \iiint dx dy dz s \cdot F[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2].$$

Dieser Ausdruck gilt für alle ausserhalb der wirkenden Massen liegenden Punkte bei jedem F , aber nicht für die innerhalb der Massen lie-

genden Punkte; man muss vielmehr, wenn F bei unendlich kleiner Annäherung unendlich gross wird, zuerst untersuchen, ob man nach der speciellen Beschaffenheit der Function F den Ausdruck noch anwenden darf.

Ist dies der Fall, so hat man:

$$P = \frac{1}{2} \iiint s V dx dy dz,$$

wobei man die Integration über den ganzen unendlichen Raum erstrecken darf.

§ 8.

Die Niveaulflächen. Der Gauss'sche Satz.

1. Die Potentialfunction ist eine Function von drei Raumcoordinaten. Ihr absolutes Gefälle ist die absolute Kraft, welche auf die Masseneinheit ausgeübt wird. Die Flächen, für welche V constant ist, bedeuten daher Flächen, auf welchen die Kraft senkrecht steht. Denkt man sich zwei solcher Flächen V und $V + dV$, welche dicht auf einander folgen, und bezeichnet man die senkrechte Entfernung derselben mit dn , so ist, weil die Kraft gleich $\frac{dV}{dn}$ ist, die Entfernung zweier

Schichten multiplicirt mit der dort herrschenden Kraft auf der ganzen Fläche constant gleich dV . Wenn nun die Massen aus Flüssigkeiten bestehen, deren Dichten verschieden sind, so werden diese im Zustande des Gleichgewichts nach Flächen des gleichen V sich lagern. Denn da die Kraft multiplicirt mit der Dicke der Schicht constant ist, so kann nur dann Gleichgewicht bestehen, wird aber auch offenbar dann Gleichgewicht bestehen, wenn die Flächen des gleichen V mit den Niveaulflächen der verschiedenen Flüssigkeiten zusammenfallen. Man nennt daher die Potentialfunction auch das Potentialniveau und die durch die Gleichung $V = \text{Const.}$ charakterisirten Flächen Niveaulflächen. Wirkt auf die äusserste Schicht ein überall gleicher Druck, so wirkt auch auf alle übrigen Niveaulflächen gleicher Druck. Man kann daher auch die Niveaulflächen Flächen des gleichen Druckes nennen.

2. Wie wir eben gesehen haben, wird die Potentialfunction eines Massensystems $m_1 m_2 m_3 \dots m_x$ dargestellt durch die Formel:

$$\sum m_x F(x),$$

wenn man unter $F(x)$ eine Function der Entfernung des Massenkpunktes m_x und des Punktes versteht, für welchen man die Potentialfunction wissen will; ferner ist

$$\sum \mu m_x F(\mu, m_x)$$

die Potentialfunction des Massensystems m im Punkte μ multiplicirt mit der Masse dieses Punktes. Hat man ein ganzes Massensystem $\sum \mu_y$, so bedeutet

$$\sum \sum \mu_y m_x F(\mu_y, m_x)$$

die Summe aller Werthe, welche die Potentialfunction des Massensystems m in den einzelnen Punkten des Massensystems μ besitzt multiplicirt mit den Massen der einzelnen Punkte μ_y . Derselbe Ausdruck ist aber auch die Summe aller Werthe, welche die Potentialfunction des Massensystems μ in den einzelnen Punkten des Massensystems m besitzt multiplicirt mit den Massen der einzelnen Punkte m_x . Hat man also überhaupt zwei Massensysteme M_1 und M_2 , deren Potentialfunctionen V_1 und V_2 sind, so ist:

$$\sum M_1 V_2 = \sum M_2 V_1.$$

Dieser von Gauss herrührende, anscheinend völlig Nichts sagende Satz ist für die Lehre von der Potentialfunction von der grössten Wichtigkeit.

Erfüllen die beiden Massensysteme den Raum stetig, so ist

$$\int s_1 V_2 = \int s_2 V_1,$$

wobei die Integrationen sich über den ganzen unendlichen Raum erstrecken.

§ 9.

Einige allgemeine Sätze und Begriffe der Mechanik. Drehungsmoment, Hauptebene, Schwerpunkt.

1. Man versteht unter dem Drehungsmoment eines Massenpunktes in Bezug auf ein beliebiges festes Centrum die Geschwindigkeit dieses Punktes multiplicirt mit seiner Masse, sowie mit der Entfernung der Richtung der Geschwindigkeit von diesem Centrum oder was dasselbe ist: die Masse des Punktes multiplicirt mit dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, welches man erhält, wenn man die Geschwindigkeit durch eine vom beweglichen Punkte ausgehende gerade Linie darstellt und die Endpunkte dieser Linie mit dem Centrum durch Radien verbindet. Die auf diesem Dreieck senkrecht stehende durch's Centrum gehende Linie ist die Achse des Moments. Die Bewegung kann gleich der Drehung des Uhrzeigers in verschiedenen Richtungen stattfinden, von denen man die eine als positiv, die andere als negativ annehmen kann.

Nimmt man ein- für allemal die Drehung, welche der Drehung der Uhrzeiger entgegengesetzt ist, als positive Drehung an, so kann man das Moment durch seine Achse sowohl der Richtung als der Grösse nach bestimmen. Wenn man ferner die Bewegung auf eine andere Ebene projicirt, z. B. auf diejenige Coordinatenebene, welche auf der z -Achse senkrecht steht und die wir kürzer als die z -Ebene bezeichnen wollen, so ist das Moment der projecirten Bewegung gleich dem ursprünglichen Moment multiplicirt mit den Cosinus des Winkels, welchen die Ebene des ursprünglichen Moments und die z -Ebene mit einander machen.

Man findet dasselbe ganz einfach, wenn man das durch seine Achse dargestellte Moment auf die z -Achse projicirt. Wenn man daher die Bewegung eines Punktes auf die drei Coordinatenebenen projicirt, so erhält man die Momente dieser drei Projectionen, wenn man das durch seine Achse dargestellte ursprüngliche Moment auf die drei Achsen projicirt.

Sind die Coordinaten des sich bewegenden Punktes in der z -Ebene gleich $x_1 y_1$ und die Coordinaten des Endpunktes der Linie, welche die Geschwindigkeit darstellt, gleich $x_2 y_2$, so ist das doppelte Dreieck, welches durch das Centrum und die beiden Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gebildet wird, wenn man die Bewegung in der Richtung von der x -Achse zur y -Achse als positive Bewegung auffasst, gleich

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = x_1 (y_2 - y_1) - y_1 (x_2 - x_1).$$

Nun ist

$$y_2 - y_1 = \frac{dy}{dt}, \quad x_2 - x_1 = \frac{dx}{dt}.$$

Man sieht hieraus, dass man hat:

$$m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right),$$

$$m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right),$$

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right),$$

wenn man die Achsen so stellt, dass die positive Bewegung um die x -Achse von der positiven y -Achse zur positiven z -Achse, die positive Bewegung um die y -Achse von der z -Achse zur x -Achse und die positive Bewegung um die z -Achse von der y -Achse zur x -Achse geht.

2. Man versteht unter Drehwirkung einer Kraft in Bezug auf ein beliebiges Centrum das Product dieser Kraft und der Entfernung der Richtung dieser Kraft vom Centrum oder was dasselbe ist, den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, welches man erhält, wenn man die Kraft ihrer Grösse und Richtung nach durch eine vom angegriffenen Punkt ausgehende Linie darstellt und die Endpunkte dieser Linie mit dem Centrum verbindet. Man kann also die Drehwirkung einer Kraft ebenso wie das Moment durch ihre Achse darstellen und erhält die Drehwirkungen der Projectionen der Kraft, wenn man die durch ihre Achse dargestellte ursprüngliche Drehkraft auf die drei Coordinatenachsen projecirt. Diese Projectionen sind nach dem Vorigen gleich:

$$m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

$$m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

$$m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right).$$

Nun ist aber

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$$

u. s. f.

Die Projection der Drehkraft auf eine beliebige Achse ist daher gleich dem nach der Zeit genommenen ersten Differenzialcoefficienten des auf dieselbe Achse projecirten Drehungsmoments.

3. Sind mehrere sich bewegende Punkte vorhanden und man projecirt ihre Momente auf die drei Achsen, so lässt sich nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte aus diesen verschiedenen Momenten ein Gesamtmoment oder Hauptmoment herstellen. Die Ebene, welche auf der Achse dieses Moments senkrecht steht, nennt man die Hauptebene. Die Projectionen des Hauptmoments sind:

$$\sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right),$$

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

4. Der Schwerpunkt eines Systems von Punkten bewegt sich gerade so, als ob alle auf das System wirkenden Kräfte und alle Massen in demselben vereinigt wären. Denn

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum m x}{\sum m} \right)$$

und $\frac{\sum m x}{\sum m}$ ist die Coordinate des Schwerpunktes auf der x -Achse.

§ 10.

Anwendung dieser allgemeinen Begriffe und Sätze. Das Princip der Erhaltung der Flächenräume in absoluten und relativen Coordinaten ausgedrückt.

Bei einem System von Punkten, die nur mit gegenseitigen Kräften auf einander wirken, ist die Summe aller Kräfte gleich Null. Bei einem solchen System bewegt sich also der Schwerpunkt mit constanter Geschwindigkeit in constanter Richtung. Ferner ist die Summe aller Drehwirkungen offenbar gleich Null; es sind also auch die Projectionen des Hauptmoments constant. Das Hauptmoment selbst ist constant und behält stets dieselbe Richtung; ebenso hat die Hauptebene stets dieselbe Lage. Man nennt diesen Satz das Princip der Erhaltung der Flächenräume.

Der Schwerpunkt ist zwar ein genau bestimmter Punkt, der sich aus den Massen berechnen lässt; da wir aber die Massen nicht unmittelbar wahrnehmen können, sondern ihre Grösse erst aus den Bewegungen schliessen müssen, welche sie hervorrufen, da wir ferner nur die relativen Bewegungen der einzelnen Massen beobachten können, d. h. die Veränderung ihrer gegenseitigen Stellungen, so entsteht hieraus die Aufgabe, die beiden Sätze von der Erhaltung der Hauptebenen und der Aequivalenz von lebender Kraft und Arbeit in relativen Coordinaten auszudrücken.

1. Das Princip der gleichen Flächenräume lautet in den vom Schwerpunkt an gerechneten Coordinaten ausgedrückt:

$$C dt = m_1 (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) + m_2 (x_2 dy_2 - y_2 dx_2) \dots$$

Sieht man nun einen der Punkte, z. B. m_1 als fest an, so sind die relativen Coordinaten der Punkte m_2 und m_3 gleich $(x_2 - x_1)$, $(x_3 - x_1)$ u. s. f., es sind überhaupt die relativen Coordinaten eines Punktes m_p gegen den Punkt m_q gleich $(x_p - x_q)$, $(y_p - y_q)$, $(z_p - z_q)$.

Wenn man nun Alles in diesen relativen Coordinaten ausdrückt, so lautet die Bedingung, dass der Schwerpunkt fest ist:

$$x_q (m_1 + m_2 \dots) + m_1 (x_1 - x_q) + m_2 (x_2 - x_q) \dots = 0$$

oder kürzer:

$$a) \quad x_q M + \sum_p m_p (x_p - x_q) = 0.$$

Ferner wird:

$$m_p x_p dy_p = m_p (x_p - x_q) (dy_p - dy_q) + m_p x_q dy_q \\ + m_p dy_q (x_p - x_q) + m_p x_q (dy_p - dy_q).$$

Berücksichtigt man nun die Gleichung a) und die ihr analogen Gleichungen, so erhält man:

$$b) \quad \sum_p m_p x_p dy_p = \sum_p m_p (x_p - x_q) (dy_p - dy_q) - \sum_p m_p x_q dy_q.$$

Nun ist offenbar für das ganze System:

$$\sum \sum m_p m_q x_p dy_p = \sum \sum m_p m_q x_q dy_q.$$

Multipliziert man nun b) mit m_q und summirt auch nach q , so hat man:

$$2 \sum \sum m_p m_q x_p dy_p = \sum \sum m_p m_q (x_p - x_q) (dy_p - dy_q).$$

Nun ist:

$$C dt = \sum m_p (x_p dy_p - y_p dx_p),$$

also:

$$\sum m_q \sum m_p (x_p dy_p - y_p dx_p) = M C dt,$$

so dass wir schliesslich haben:

$$2 M C dt = \sum \sum m_p m_q [(x_p - x_q) (dy_p - dy_q) - (y_p - y_q) (dx_p - dx_q)]$$

oder in Worten: die Summe aller relativen Drehungsmomente multiplicirt mit den Massen ihrer Centra ist constant gleich dem doppelten absoluten Drehungsmoment multiplicirt mit der Gesamtmasse.

2. In gleicher Weise lässt sich auch das Princip von der Aequivalenz der Arbeit und der lebendigen Kraft in relativen Coordinaten ausdrücken; es ist nämlich

$$\sum m_p (dx_p)^2 = \sum_p m_p (dx_p - dx_q)^2 + 2 \sum_p m_p dx_q (dx_p - dx_q) \\ + \sum m_q (dx_q)^2 = \sum_p m_p (dx_p - dx_q)^2 - \sum_p m_p (dx_q)^2,$$

also:

$$2 \sum \sum m_p m_q (dx_q)^2 = \sum \sum m_p m_q (dx_p - dx_q)^2.$$

Nun ist nach § 7

$$\Delta \sum m_p (dx_p^2 + dy_p^2 + dz_p^2) = 2 \Delta P dt^2,$$

so dass wir schliesslich haben:

$$\frac{1}{2} \sum \sum m_p m_q [(dx_p - dx_q)^2 + (dy_p - dy_q)^2 + (dz_p - dz_q)^2] = 2 M \Delta P dt^2,$$

in Worten ausgedrückt: die Zunahme der Summe aller relativen lebendigen Kräfte multiplicirt mit den Massen der Centra ist gleich der Zunahme des Potentials mal der doppelten Gesamtmasse.

3. Denkt man sich den Schwerpunkt bewegt und sind dessen Coordinaten x, y, z , die Coordinaten des Massenpunktes m_p auf den Schwerpunkt bezogen x_p, y_p, z_p , so sind die absoluten Coordinaten des Punktes m_p gleich

$$x + x_p; \quad y + y_p; \quad z + z_p.$$

Ferner ist

$$\sum m_p \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dx_p}{dt} \right)^2 = M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \sum m_p \left(\frac{dx_p}{dt} \right)^2,$$

weil $\sum m_p \frac{dx_p}{dt} = 0$ ist.

Die lebendige Kraft ist also gleich der lebendigen Kraft der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse + der Summe der auf den Schwerpunkt bezogenen lebendigen Kräfte.

§ 11.

Die Bewegung fester Körper. Das Trägheitsmoment.

Wenn alle Punkte eines Systems so fest mit einander verbunden sind, dass sie stets die gleiche Stellung gegenseitig einnehmen und das System sich bewegt, während man einen beliebigen Punkt als fest betrachtet, so giebt es immer eine durch dieses Centrum gehende Linie, welche momentan in Ruhe bleibt; denn legt man durch das Centrum C eine beliebige Ebene, und nimmt man in dieser zwei Punkte a und b an, so werden diese sich während des Zeitmoments dt nach a_1 und b_1 bewegen und der Durchschnitt der Ebenen aCb und a_1Cb_1 wird momentan in Ruhe sein, also eine momentane Drehungsachse bilden. Die Drehgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher von der Drehungsachse um die Längeneinheit entfernt ist. Bezeichnet man die Drehgeschwindigkeit mit v , die Entfernung eines beliebigen Massenpunktes von der Drehachse mit r , so ist das Drehungsmoment gleich

$$v \sum m r^2.$$

Den Ausdruck $\sum m r^2$ nennt man das Trägheitsmoment. Die lebendige Kraft ist gleich

$$\frac{1}{2} v^2 \sum m r^2.$$

Man kann daher das Trägheitsmoment definiren als die doppelte lebendige Kraft bei der Einheit der Drehgeschwindigkeit. Die Drehgeschwindigkeit lässt sich ebenso wie das Drehungsmoment durch ein Stück ihrer Achse darstellen und man kann sie nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte in drei Drehgeschwindigkeiten um drei Achsen zerlegen. Dreht sich ein Körper z. B. um die Achse x in der Richtung von der y -Achse zur z -Achse mit der Geschwindigkeit p , so ist in Folge davon die Geschwindigkeit des Punktes x, y, z in der Richtung x gleich 0, in der Richtung y gleich $-pz$ und in der Richtung z gleich py .

Finden nun auch Drehungen um die y -Achse und z -Achse mit den Geschwindigkeiten q und r statt, so erhalten wir:

Drehung um die Achse	Geschwindigkeit	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{dz}{dt}$
x	p	0	$-pz$	py
y	q	qz	0	$-qx$
z	r	$-ry$	rx	0
Summe	.	$qz - ry$	$rx - pz$	$py - qx$

Ist die Entfernung eines Punktes m vom Centrum C gleich der Einheit, sind die Projectionen der Linie Cm gleich α, β, γ und dreht sich der Körper um die Linie Cm mit der Geschwindigkeit v , so ist

$$p = v\alpha; \quad q = v\beta; \quad r = v\gamma$$

und man hat nach dieser Tabelle für den Punkt m

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} = 0.$$

Die Geschwindigkeit der Linie Cm ist also gleich Null, mithin die Linie Cm eine momentane Achse.

Sind die Trägheitsmomente um die drei Coordinatenachsen gleich ABC , so sind die Drehungsmomente um diese drei Achsen gleich

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr,$$

also das Hauptdrehungsmoment gleich

$$\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}$$

und die Lage seiner Achse ergibt sich aus den Projectionen $A p$, $B q$, $C r$. Das Drehungsmoment um die momentane Achse ist nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte gleich

$$A p \cdot \frac{p}{v} + B q \cdot \frac{q}{v} + C r \cdot \frac{r}{v},$$

also die lebendige Kraft gleich

$$\frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse ist, wie oben bereits bemerkt wurde, gleich der doppelten lebendigen Kraft, wenn sich der Körper um diese Achse mit der Geschwindigkeit 1 dreht. Sind die Cosinus der Achse, deren Trägheitsmoment man bestimmen will, gleich $\alpha \beta \gamma$, so sind die Geschwindigkeiten $p q r$ gleich $\alpha \beta \gamma$, wenn $v = 1$ ist.

Nun ist ferner die lebendige Kraft gleich

$$\frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right],$$

also unter Berücksichtigung obiger Tabelle das Trägheitsmoment gleich

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m (x^2 + z^2) + \gamma^2 \Sigma m (x^2 + y^2) \\ & - 2 \beta \gamma \Sigma m y z - 2 \alpha \gamma \Sigma m x z - 2 \alpha \beta \Sigma m x y. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck weist sogleich auf eine Oberfläche vom zweiten Grade hin; denn nennt man ϱ den Radius derselben und $\varrho \alpha$, $\varrho \beta$, $\varrho \gamma$ die Projectionen desselben auf die drei Achsen, so ist ihre centrische Gleichung allgemein:

$$\frac{1}{\varrho^2} = a \alpha^2 + b \beta^2 + c \gamma^2 - 2 d \beta \gamma - 2 f \alpha \gamma - 2 g \alpha \beta.$$

Setzt man für a , b , c u. s. f. die vorigen Ausdrücke, so erhält man ein Ellipsoid, weil das Trägheitsmoment immer endlich bleibt. Jedes Ellipsoid lässt sich aber so stellen, dass die Coefficienten $d f g$ gleich Null werden.

Es lässt sich also jeder Körper auch so stellen, dass man hat

$$\Sigma m x y = \Sigma m x z = \Sigma m y z = 0.$$

Man nennt alsdann die drei Coordinatenachsen Hauptachsen.

Die Trägheitsmomente um die drei Hauptachsen sind:

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = A; \quad \Sigma m (x^2 + z^2) = B; \quad \Sigma m (x^2 + y^2) = C.$$

Das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse α, β, γ ist ferner gleich

$$A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2.$$

§ 12.

Die freie Rotation und die drei Hauptachsen.

Bezeichnet man die Drehungsmomente um die drei im Raume fest gedachten Achsen XYZ durch PQR , so hat man nach § 9 für einen Massenpunkt

$$P = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt},$$

$$Q = z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt},$$

$$R = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}.$$

Bezeichnet man ferner mit pqr die Drehungsgeschwindigkeit um die drei Achsen XYZ , so hat man unter Benutzung der Tabelle in § 11:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} P = p(y^2 + z^2) - qxy - rxz, \\ Q = q(x^2 + z^2) - pxy - ryz, \\ R = r(x^2 + y^2) - pxz - qyz. \end{array} \right.$$

Ferner hat man, weil $\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$ u. s. f. ist:

$$\frac{dx^2}{dt} = 2(qxz - rxy),$$

$$\frac{dy^2}{dt} = 2(rxy - pyz),$$

$$\frac{dz^2}{dt} = 2(pyz - qxy),$$

$$\frac{dxy}{dt} = r\bar{x}^2 - pxz + qyz - ry^2,$$

$$\frac{dxz}{dt} = pxy - qx^2 + qz^2 - ryz,$$

$$\frac{dyz}{dt} = py^2 - qxy + rxz - pz^2.$$

Differenzirt man nun die Gleichungen a) und substituirt die soeben gefundenen Differenzialausdrücke, so hat man die Differenzialgleichungen für p, q, r . Man hat hiernach:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{dp}{dt} \sum m (y^2 + z^2) - \frac{dq}{dt} \sum m xy - \frac{dr}{dt} \sum m xz \\ &+ p \sum m \frac{d}{dt} (y^2 + z^2) - q \sum m \frac{dxy}{dt} - r \sum m \frac{dxz}{dt} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist die Wahl des Coordinatensystems, auf welches sich die Coordinaten xyz und die Kräfte PQR beziehen, gleichgültig. Wählt man für einen bestimmten Zeitmoment das Coordinatensystem so, dass die Achsen der Kräfte mit den Hauptachsen zusammenfallen, so verschwinden die Summen:

$$\sum m xy; \quad \sum m xz; \quad \sum m yz;$$

man hat daher, wenn man für jeden Zeitmoment das Coordinatensystem der Kräfte und Drehgeschwindigkeiten so wählt:

$$\text{b) } \left\{ \begin{aligned} \frac{A dp}{dt} + qr (C - B) &= \frac{dP}{dt}, \\ \frac{B dq}{dt} - pr (C - A) &= \frac{dQ}{dt}, \\ \frac{C dr}{dt} + pq (B - A) &= \frac{dR}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Sind die Kräfte, welche auf einen Massenpunkt wirken, gleich XYZ , so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \sum (yZ - zY); & \frac{dQ}{dt} &= \sum (zX - xZ); \\ \frac{dR}{dt} &= \sum (xY - yX), \end{aligned}$$

wobei jedoch, wie gesagt, die Coordinaten stets auf die drei beweglichen Hauptachsen des Körpers bezogen werden müssen.

Bei den mechanischen Problemen handelt es sich weniger darum, die Drehgeschwindigkeiten pqr , als die Lage der Hauptachsen des Körpers in Bezug auf ein festes Coordinatensystem zu wissen, und da auch die drei Drehkräfte in der Regel von der Lage der Hauptachsen abhängen, so muss man drei andere von der Zeit abhängige Coordinaten

eingeführen, welche die Lage des Körpers, d. i. der drei Hauptachsen desselben, direct bestimmen.

Fällt das bewegliche Coordinatensystem mit dem festen zusammen und man dreht dasselbe zuerst um die Achse Z' um den Winkel ψ , so erhält dasselbe eine neue Lage $X'Y'Z'$; dreht man in dieser neuen Lage das System um die Achse Y' um den Winkel ϑ , so erhält man eine neue Lage $X''Y''Z''$; dreht man ferner in dieser Lage um die Achse Z'' um den Winkel φ , so erhält man schliesslich die Lage $X'''Y'''Z'''$ und es ist klar, dass man durch drei solcher Drehungen dem beweglichen System jede beliebige Lage geben, somit durch die Winkel $\varphi\vartheta\psi$ jede beliebige Lage ausdrücken kann. Denkt man sich den Punkt xyz fest und dreht man sein Coordinatensystem um die z -Achse um den Winkel ψ , so hat man:

$$\alpha) \quad \begin{cases} x = x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi, \\ y = x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi, \\ z = z_1. \end{cases}$$

Dreht man weiter, während der Punkt xyz immer fest bleibt, das Coordinatensystem $X'Y'Z'$ um die Achse Y' in die neue Lage $X''Y''Z''$, so hat man:

$$\beta) \quad \begin{cases} z_1 = z_2 \cos \vartheta - x_2 \sin \vartheta, \\ x_1 = z_2 \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Dreht man nun weiter, so dass das Coordinatensystem die dritte Lage $X'''Y'''Z'''$ erhält, so hat man:

$$\gamma) \quad \begin{cases} x_2 = x_3 \cos \varphi - y_3 \sin \varphi, \\ y_2 = x_3 \sin \varphi + y_3 \cos \varphi, \\ z_2 = z_3. \end{cases}$$

Wenn man nun die Gleichungen $\gamma)$ in die Gleichungen $\beta)$ und diese wieder in $\alpha)$ substituirt und $x'y'z'$ für $x_3y_3z_3$ setzt, so hat man:

$$\begin{aligned} x &= x' (\cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) \\ &+ y' (-\cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi) \\ &+ z' \sin \vartheta \cos \psi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x' (\cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \\ &+ y' (-\cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi) \\ &+ z' \sin \vartheta \sin \psi; \end{aligned}$$

$$z = x' (-\sin \vartheta \cos \varphi) + y' \sin \vartheta \sin \varphi + z' \cos \vartheta.$$

Zur leichtern Anschauung construiren wir nun folgende Tabelle:

	x	y	z	
x'	α	α'	α''	x'
y'	β	β'	β''	y'
z'	γ	γ'	γ''	z'
	x	y	z	

Hierin bedeutet der in der Kreuzung zweier Achsen stehende Buchstabe den Cosinus des Winkels, welchen sie machen. Wir haben somit:

$$\alpha = \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi.$$

$$\alpha' = \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi,$$

$$\alpha'' = -\sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$\beta = -\cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi,$$

$$\beta' = -\cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi,$$

$$\beta'' = \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$\gamma = \sin \vartheta \cos \psi; \quad \gamma' = \sin \vartheta \sin \psi; \quad \gamma'' = \cos \vartheta.$$

Die Drehgeschwindigkeit um die Achse x' ist gleich der Projection der absoluten Geschwindigkeiten der Endpunkte der gleich 1 gesetzten y' -Achse oder z' -Achse auf die Ebene $y'z'$ u. s. f.; wir finden daher durch einfache geometrische Betrachtungen:

$$p = -\sin \vartheta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt} + \sin \varphi \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$q = \sin \vartheta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt}.$$

Soll sich ein Körper ohne äussere Kraft um eine Achse constant drehen, also p , q , r constant sein, so müssen folgende Bedingungen stattfinden:

entweder $p = r = 0$,

oder $p = q = 0$,

oder $q = r = 0$,

d. h. die Drehung muss um eine der drei Hauptachsen stattfinden.

Ist $A = B = C$, sind also die drei Hauptmomente gleich, wie bei allen regelmässigen Körpern, so ist jede Achse constant. Sind zwei der Hauptmomente gleich, z. B. $A = B$, so ist ausser der z -Achse jede Achse constant, welche in der darauf senkrechten Ebene liegt.

Bewegt sich der Körper nicht um eine constante Achse und nennt man die lebendige Kraft h , so hat man:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Nennt man ferner das Hauptdrehungsmoment l , so hat man:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = l^2.$$

Betrachtet man $p q r$ als rechtwinkelige Coordinaten, so sind dies die Gleichungen zweier Ellipsoide, deren Durchschnitt die Linie an giebt, durch welche die momentane Achse immer durchpassirt. Die momentanen Achsen bilden also zusammen einen elliptischen Kegel.

Nimmt man die z -Achse als Achse des Hauptdrehungsmoments, so sind die Drehungsmomente der beiden anderen festen Achsen gleich Null und man hat nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte für die Drehungsmomente um die drei Achsen $X' Y' Z'$

$$Ap = \alpha'' l, \quad Bq = \beta'' l, \quad Cr = \gamma'' l,$$

woraus sich die Winkel α'' , β'' , γ'' bestimmen lassen.*

* Die vollständige Lösung des Problems mit Hülfe der elliptischen Functionen von Jacobi findet sich in Crelle's Journal Bd. 39 S. 293 flgg.

II. Abtheilung.

Die Potentialfunction im engeren Sinne.

§ 13.

Das Newton'sche Attractionsgesetz. Wirkung der Elektrizität und des Magnetismus.

Das Newton'sche Attractionsgesetz bedarf wohl keiner Erläuterung. Vermöge desselben ist $f(r) = -\frac{1}{r^2}$, also $F(r) = \frac{1}{r}$ und die Kraftfunction zweier Massenpunkte m_1 und m_2 gleich

$$\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen nimmt man gewöhnlich zwei Flüssigkeiten, eine positive und eine negative an, die so beschaffen sind, dass sich die ungleichnamigen anziehen und die gleichnamigen abstossen. Bezeichnet man die positiven Massentheilchen in der Rechnung positiv, die negativen negativ, so kann man die Kraftfunction zweier beliebiger elektrischer Massentheilchen $m_1 m_2$ ausdrücken durch

$$\pm \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Wie die Naturbeobachtung zeigt und wie auch aus dieser Hypothese später nachgewiesen werden soll, sammelt sich die freie Elektrizität im Zustande des Gleichgewichts nur auf der Oberfläche der leitenden Körper und die Potentialfunction der auf der Oberfläche angesammelten Massen ist auf der ganzen Oberfläche und innerhalb derselben constant.

Zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen nimmt man zwei magnetische Flüssigkeiten an, die gerade so wirken. Von diesen Flüssigkeiten darf man jedoch nicht voraussetzen, dass sie durch den ganzen Magneten frei beweglich sind, sondern man muss sich vorstellen, dass nur innerhalb der kleinsten Theile der Molecule des Magnets eine Bewegung der dort eingeschlossenen magnetischen Massen möglich ist und in jedem Molecule gleich grosse Quantitäten positiven und negativen Magnetismus vorhanden sind. In weichem Eisen denkt man sich diese magnetischen Flüssigkeiten vollkommen beweglich, so dass sie sich unter dem Einfluss einer magnetisirenden Kraft augenblicklich trennen und augenblicklich wieder zusammenfliessen, sowie dieser Einfluss beseitigt ist. Um die Erscheinungen beim Stahl zu erklären, muss man sich vorstellen, dass die magnetischen Flüssigkeiten nicht vollkommen beweglich sind, sondern ein gewisses Hinderniss, wie Reibung, eine Coercitivkraft zu überwinden haben, so dass der Magnetismus des Stahles doch noch fortdauert, wenn auch die magnetisirende Kraft beseitigt ist, gleich wie ein auf einer schiefen Ebene emporgehobenes Gewicht in Folge der Reibung auf der schiefen Ebene oben bleibt, auch wenn die hebende Kraft aufgehört hat zu wirken. — Die Hypothese, welche die Erscheinungen der Elektrizität und des Magnetismus durch zwei entgegengesetzte Flüssigkeiten erklärt, ist zwar wenig befriedigend, aber sie hat den Vortheil, dass sie sich der Rechnung leicht anpasst und kann daher nach dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft nicht entbehrt werden.

§ 14.

Die Potentialfunction im engeren Sinne. Der Zusammenhang ihrer Theorie und der Theorie der Wärmeleitung. Die wirkenden Massen lassen sich als Wärmequellen von constanter Mächtigkeit ansehen.

Wir sind nun bei der Betrachtung der Function $\frac{1}{r}$, deren Potentialfunction auch die Potentialfunction schlechtweg heisst, angelangt.

Das Newton'sche Anziehungsgesetz geht offenbar von der Anschauung aus, dass die Kraft in einem constanten Strome gleichsam von den materiellen Punkten in den leeren Raum ausströme, so dass auf verschiedenen, einen Massenpunkt einschliessenden concentrischen Kugelflächen immer dieselbe Gesamtkraft sich ausbreitet. Das Newton'sche Anziehungsgesetz ist somit nur ein Ausfluss des Grundsatzes,

welchen wir oben an die Spitze der ganzen Physik gestellt haben, dass nämlich die Naturgesetze diejenigen Gesetze sind, welche unserem Verstande am fasslichsten erscheinen, und ist daher dieses Gesetz den beiden Gesetzen von der Erhaltung der Kraft und der Materie ganz analog. Denkt man sich z. B., dass von einem Punkte ein Strom von Wärme ausgehe, der immer gleiche Stärke besitzt, mit anderen Worten, denkt man sich diesen Punkt als eine Quelle von constanter Mächtigkeit, welche in den unendlichen Raum ununterbrochen Wärme aussendet, so wird, sobald der dadurch entstandene Strom constant geworden ist, durch jede concentrische Kugelfläche in der Zeiteinheit die gleiche Wärmequantität gehen. Man kann daher die Wärme, welche in der Zeiteinheit durch ein Element einer solchen Kugelfläche geht, gleich der Kraft setzen, welche in der Richtung der Normale wirkt.

Denkt man sich nun, dass die Wärme, welche in der Zeiteinheit durch eine Fläche der gleichen Temperatur strömt, proportional dieser Fläche und deren Gefälle sei, und bezeichnet man die Temperatur durch u , so strömt durch die Kugelfläche vom Radius r die Wärme

$-4\pi r^2 \frac{du}{dr}$, und da diese constant gleich der Mächtigkeit der im

Centrum befindlichen Wärmequelle sein muss, so haben wir: $u = \frac{1}{r}$

und die Mächtigkeit der im Centrum befindlichen Wärmequelle ist gleich 4π .

Die Potentialfunction des Massenpunktes 1 ist daher gleich der stationären Temperatur des unendlichen Raumes, in welchem sich statt des Massenpunktes eine Wärmequelle von der Mächtigkeit 4π befindet.

Ist überhaupt die Leitungsfähigkeit κ , so ist die Quantität Wärme, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer Gleichfläche geht, gleich $\kappa \Delta u$, und die Quantität Wärme, welche durch die Flächeneinheit einer andern Fläche geht, welche mit der Gleichfläche den Winkel φ macht, ist offenbar gleich $\kappa \Delta u \cos \varphi$. Ist z. B. die Normale dieser zweiten Fläche die x -Achse, so ist diese Quantität gleich

$$\kappa \Delta u \cos (nx) = \kappa \frac{du}{dx}.$$

Schneidet man aus dem Raum ein kleines Würfelchen heraus, dessen Seiten gleich δ sind und mit den Achsen parallel laufen, und bezeichnet man ferner die Flächen des Würfelchens durch $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$, $Z_1 Z_2$,

so geht durch die Fläche X_1 die Wärme $-\kappa \frac{du}{dx} \delta^2$ in das Würfelchen, durch die gegenüberliegende Fläche X_2 geht die Wärme

$$\delta^2 \left[\kappa \frac{du}{dx} + \delta \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{du}{dx} \right) \right]$$

in das Würfelchen. Die Temperaturzunahme des Würfelchens ist daher:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{du}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\kappa \frac{du}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\kappa \frac{du}{dz} \right).$$

Ist die Wärmeleitung constant und gleich 1, so hat man:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

Sowie nun das Gefälle eine unverkennbare Analogie mit dem ersten Differenzialcoefficienten für eine Veränderliche hat, weshalb wir es mit Δ bezeichnen, so hat der Ausdruck

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}$$

oder die Temperaturzunahme eine unverkennbare Aehnlichkeit mit dem zweiten Differenzialcoefficienten bei einer Veränderlichen; wir bezeichnen diesen Ausdruck daher einfach durch

$$\Delta^2 u.$$

Zu den hier vorgetragenen Resultaten gelangen wir auch durch folgende etwas allgemeinere Betrachtung. Denken wir uns ein System von Punkten, in welchem sich die Wärme durch Leitung so fortpflanzt, dass jeder Punkt nur von den in unmittelbarer Nähe gelegenen Punkten erwärmt wird, und zwar so, dass die Geschwindigkeit der Temperaturveränderung eines Punktes, soweit sie durch einen beliebigen andern in unmittelbarer Nähe gelegenen Punkt bewirkt wird, proportional ist der Temperaturdifferenz beider Punkte, so haben wir:

$$\frac{du}{dt} = \Sigma \delta u,$$

wobei das Summenzeichen alle um den betrachteten Punkt herumliegenden erwärmenden (oder erkältenden) Punkte umfasst und δu die Temperaturdifferenz jedes einzelnen Punktes der Summe und des betrachteten Punktes ausdrückt. Sind die Coordinaten des betrachteten Punktes

a, b, c , die Coordinaten eines beliebigen erwärmenden Punktes auf diesen Punkt a, b, c als Centrum bezogen, gleich x, y, z , so ist:

$$\begin{aligned}\delta u &= u(a+x, b+y, c+z) - u(a, b, c) \\ &= \frac{du}{da}x + \frac{du}{db}y + \frac{du}{dc}z \\ &\quad + \frac{d^2u}{da^2}\frac{x^2}{2} + \frac{d^2u}{db^2}\frac{y^2}{2} + \frac{d^2u}{dc^2}\frac{z^2}{2} \\ &\quad + \frac{d^2u}{da\,db}xy + \frac{d^2u}{da\,dc}xz + \frac{d^2u}{db\,dc}yz.\end{aligned}$$

Die höheren Potenzen der Coordinaten x, y, z kann man vernachlässigen. Sind nun die erwärmenden Punkte so vertheilt, dass der betrachtete Punkt im Schwerpunkt derselben liegt, so ist:

$$\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0.$$

Ferner kann man nach § 11 das Coordinatensystem immer so stellen, dass

$$\Sigma xy = \Sigma xz = \Sigma yz = 0$$

wird. Sind nun die Punkte überall gleich angeordnet, so sind

$$\Sigma x^2 = a, \quad \Sigma y^2 = b, \quad \Sigma z^2 = c$$

durch den ganzen Körper constant und man hat:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2u}{dx^2} + b \frac{d^2u}{dy^2} + c \frac{d^2u}{dz^2}.$$

Sind die Punkte in den Richtungen der drei Hauptachsen in gleicher Weise gruppirt, so wird $a = b = c$ und man hat:

$$\frac{du}{dt} = a \Delta^2 u.$$

Hieran lässt sich zugleich folgende Betrachtung knüpfen: Kennt man eine Auflösung der Gleichung

$$\frac{du}{dt} = \Delta^2 u$$

und lautet diese

$$u = F(x, y, z, t),$$

so ist

$$\omega = F\left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}, t\right)$$

eine Auflösung der Gleichung:

$$\frac{du}{dt} = a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

Denn man hat:

$$\omega'_t = F'_t \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}, t \right); \quad a \omega''_{x^2} = F''_{x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}, t \right)$$

u. s. f.

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\omega'_t = \Delta^2 F \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}, t \right),$$

weil $\omega'_t = \Delta^2 F$ für jede Zahlencombination x, y, z, t , als auch für $\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}, t$ sein soll; wir haben somit:

$$\frac{d\omega}{dt} = a \frac{d^2 \omega}{dx^2} + b \frac{d^2 \omega}{dy^2} + c \frac{d^2 \omega}{dz^2}.$$

Es bedeutet nun:

$$\omega = F \left(\frac{x}{\sqrt{a}}, \frac{y}{\sqrt{b}}, \frac{z}{\sqrt{c}}, t \right)$$

ein Flächensystem, welches man erhält, wenn man in dem Flächensystem

$$u = F(x, y, z, t)$$

alle $x, \sqrt{a}$ mal so gross, alle $y, \sqrt{b}$ mal so gross und alle $z, \sqrt{c}$ mal so gross werden lässt. So ist z. B.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

die Gleichung der Kugel vom Radius 1 und

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{b}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{c}} \right)^2 = 1$$

die Gleichung eines Ellipsoides, dessen Achsen $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ sind.

Man sieht aus dieser Betrachtung, dass die Wärme, welche von einem Punkte ausgeht, sich innerhalb eines Krystalles so verbreitet, dass die Flächen gleicher Temperatur Ellipsoide sind.

§ 15.

Consequenzen aus dieser Anschauungsweise durch zehn Hauptsätze über die Potentialfunction ausgedrückt. Die Wärme, welche durch das Zusammenstürzen kosmischer Massen entsteht.

Ist die Fortpflanzung der Wärme nach allen Richtungen gleich und ist der Temperaturzustand stationär, so ist, wie wir gesehen haben:

$$\Delta^2 u = 0.$$

Diese Differenzialgleichung für den stationären Temperaturzustand ist linear. Wenn demnach irgend zwei Functionen einzeln den stationären Temperaturzustand darstellen, so stellt auch ihre Summe den stationären Temperaturzustand dar, und man sieht leicht ein, dass die Potentialfunction eines Systemes von Massenpunkten gleich ist der stationären Temperatur des unendlichen Raumes, wenn man sich jeden Massenpunkt m als eine Wärmequelle von der Mächtigkeit $4\pi m$ denkt.

Da wir die abstossenden Kräfte positiv annehmen und für anziehende Körper die Potentialfunction eines Punktes gleich $\frac{1}{r}$ ist, so müssen wir für anziehende Massen positive Wärmequellen und für abstossende Massen negative Wärmequellen substituieren.

Aus dieser Anschauung der Potentialfunction lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Ist der Raum stetig mit Masse erfüllt, so wird die Potentialfunction

$$\lim \sum \frac{\Delta x \Delta y \Delta z s}{r}.$$

Die Potentialfunction eines stetig mit Masse erfüllten Raumes wird daher dargestellt durch den stationären Temperaturzustand, welcher eintritt, wenn man in jedem Punkte eine Wärmequelle von der Mächtigkeit $4\pi s \Delta x \Delta y \Delta z$ denkt und alsdann die Anzahl der Punkte unendlich gross nimmt, mit anderen Worten, wenn man sich den ganzen unendlichen Raum als eine Wärmequelle denkt, deren Mächtigkeit (auf die Raumeinheit bezogen) an der Stelle x, y, z durch die Dichtigkeit der Masse an dieser Stelle mal 4π angedeutet wird.

Wie wir oben gesehen haben, ist die Temperaturzunahme dargestellt durch die Gleichung $u'_t = \Delta^2 u$. Diese Gleichung gilt jedoch nur für den Fall, wenn der Punkt x, y, z nur von aussen Wärme auf-

nimmt. Ist aber der Punkt x, y, z selbst eine Wärmequelle von der Mächtigkeit $4\pi s$, so ist offenbar

$$u' = \Delta^2 u + 4\pi s$$

die allgemeinste Gleichung für den stationären Temperaturzustand und die Potentialfunction ist daher:

$$0 = \Delta^2 u + 4\pi s.$$

Man hat somit für's Newton'sche Gesetz:

$$4\pi s = -\Delta^2 u$$

und für die Elektrizität:

$$4\pi s = \Delta^2 u.$$

2. Ist die Potentialfunction auf einer geschlossenen Fläche, innerhalb deren sich keine Massen befinden, constant, so hat sie innerhalb dieses Raumes überall denselben Werth, wie auf der Oberfläche; denn es ist klar, dass jeder in siedendem Wasser befindliche Körper die constante Temperatur dieses Wassers haben muss. Sind daher Massen so vertheilt, dass die Flächen gleicher Dichte concentrische Kugelflächen bilden, so sind auch die Niveauflächen concentrische Kugelflächen. Befindet sich nun innerhalb dieser Massen ein hohler concentrischer Raum, so ist innerhalb desselben die Potentialfunction constant. Eine Kugelschale übt daher nirgends innerhalb ihres Hohlraumes eine Wirkung aus.

3. Wenn zwei, innerhalb einer geschlossenen Fläche befindliche Massensysteme ausserhalb dieser Fläche überall gleiche Wirkung äussern, so sind ihre Massen gleich. Denn denkt man sich das eine dieser Massensysteme negativ, so ist ausserhalb der Flächen die Potentialfunction beider Systeme zusammen gleich Null; denkt man sich die Massensysteme als positive und negative Wärmequellen, so ist klar, dass ausserhalb derselben nur dann constante Nulltemperatur herrschen kann, wenn die positive Wärmequelle gerade so viel Wärme entwickelt, als die negative absorbirt.

4. Ist die Potentialfunction auf einer, den wirkenden Stoff umschliessenden Fläche gegeben, so ist sie auch überall ausserhalb dieser Fläche gegeben; denn der Temperaturzustand ausserhalb dieser Fläche ist offenbar derselbe, auf welche Weise man auch die gegebene Fläche auf der gegebenen Tem-

peratur erhalten mag. Man kann sich z. B. auf dieser Fläche Wärmequellen vertheilt denken, welche so wirken, dass sie die Fläche auf der gegebenen Temperatur erhalten. Wenn daher zwei innerhalb einer Fläche liegende Massensysteme auf derselben gleiche Potentialfunctionen geben, so wirken sie ausserhalb dieser Fläche gleich und ihre Massen sind nach Nr. 2 gleich.

5. Aus Nr. 3 folgt, dass man jede Masse auf einer sie umschliessenden Fläche so vertheilen kann, dass ihre Wirkung ausserhalb dieser Fläche unverändert bleibt. Dieser Satz wird vielleicht noch anschaulicher durch folgende Betrachtung. Befindet sich eine Wärmequelle innerhalb einer geschlossenen Fläche und denkt man sich ferner, diese Fläche sei eine Kältequelle, z. B. eine dünne Schicht schmelzendes Eis, so wird sowohl diese, als auch der ganze äussere Raum auf der constanten Nulltemperatur bleiben. Man sieht hieraus, dass man auf der Oberfläche einen entgegengesetzt wirkenden Stoff so vertheilen kann, dass er den innerhalb der Fläche befindlichen Stoff nach aussen neutralisirt. Man kann also auch einen gleich wirkenden Stoff auf der Oberfläche so vertheilen, dass er gerade so wirkt, wie der innerhalb befindliche. Dass die auf der Oberfläche vertheilte Masse gleich der innerhalb befindlichen sein muss, wenn sie diese ersetzen soll, ergibt sich schon aus Nr. 2.

6. Die Summe aller Kräfte, welche auf einer geschlossenen Oberfläche in der Richtung der Normalen nach aussen wirken, ist gleich der Summe der innerhalb dieser Fläche befindlichen Massen, dividirt durch 4π . Bezeichnet man die Richtung der Normale der gegebenen Fläche durch n , so lautet dieser Satz:

$$4\pi M = - \int \frac{dV}{dn} d\sigma,$$

wenn man zugleich unter $d\sigma$ ein Element der Oberfläche versteht und die Integration über die ganze Oberfläche ausdehnt. Denn denkt man sich die Massen als Wärmequellen, so findet man die gesammte Mächtigkeit dieser Wärmequellen, d. i. 4π mal die gesammte Masse, wenn man um dieselben eine geschlossene Fläche legt und die Wärme misst, welche durch diese durchpassirt. Diese Wärme wird aber durch obiges Integral dargestellt.

7. Ist die Oberfläche, welche die wirkenden Massen einschliesst, eine Niveaufläche, und man will die Massen auf dieser Fläche so vertheilen, dass sie nach aussen

gleiche Wirkung äussern, so muss man die Dichte des Stoffes auf der Oberfläche überall gleich $\frac{1}{4\pi}$ mal der dort herrschenden absoluten Kraft setzen. Dass alsdann die auf der Oberfläche befindlichen Massen gleich den innerhalb befindlichen Massen sind, ergibt sich aus Nr. 5. Die Wirkung nach aussen ist aber auch dieselbe. Ist die Temperatur auf der Oberfläche constant, so fliesst nach innen nirgends Wärme ab, nach aussen fliesst sie in der Richtung der Normale ab; da nun die Menge der abfliessenden Wärme proportional dem Gefälle ist, so muss auch die Mächtigkeit der in jedem Oberflächenelement wirkenden Wärmequelle proportional dem Gefälle sein, wenn keine Aenderung eintreten soll. Man kann sich dieses Resultat auch in folgender Weise anschaulich machen. Man denke sich auf der Oberfläche eine Kältequelle, welche die Oberfläche auf constanter Temperatur erhält; alsdann wird das Innere auf derselben constanten Temperatur $-a$ erhalten werden. Setzt man nun ins Innere eine Wärmequelle von derselben Mächtigkeit wie die Kältequelle, welche für sich den Temperaturzustand V hervorbringen würde, so bringen beide zusammen innerhalb der Oberfläche den Temperaturzustand $V - a$ hervor, und ausserhalb muss überall constante Nulltemperatur herrschen, wenn man V so bestimmt, dass an der Oberfläche $V = a$ ist. Dass dies der Fall sein muss, wenn die beiden Quellen gleiche Mächtigkeit haben, ergibt sich aus den vorigen Entwicklungen. Da nun nach aussen weder Wärme, noch Kälte abfliesst, so ist die Mächtigkeit der die innere Wärmequelle neutralisirenden Kältequelle offenbar gleich $-\frac{dV}{dn} \cdot 4\pi$ gleich der absoluten Kraft der inneren Massen an der Oberfläche mal 4π .

8. Aus dem Vorigen ergibt sich auch, dass die Potentialfunction von Massen, welche auf einer Niveafläche so vertheilt sind, dass ihre Dichtigkeit proportional dem Gefälle auf dieser Niveafläche ist, auf dieser Fläche und innerhalb derselben constant ist.

9. Sind Massen über eine Oberfläche verbreitet, so kann man sie als eine sehr dünne Schicht betrachten, und die Summe der Massen ist nach Nr. 5 gleich

$$-\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{dV}{dna} + \frac{dV}{dni} \right) d\sigma,$$

wenn man unter na die Richtung der Normale nach aussen und unter ni die Richtung der Normale nach innen versteht. Dieser Ausdruck

gilt auch für ein kleines Stückchen der Schicht; man hat daher für die Dichte der Masse den Ausdruck:

$$s = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dna} + \frac{dV}{dni} \right).$$

10. Aus dem bisher Gesagten wird klar, dass concentrisch in Kugelschichten gelagerte Massen nach aussen gerade so wirken, als ob sie im Mittelpunkte vereinigt wären. Ist daher das Gesetz der Dichte als Function des Radius ϱ ausgedrückt gleich s , der Radius der ganzen Kugel R und die Entfernung des angegriffenen Punktes gleich r , so ist für einen Punkt ausserhalb der Kugel

$$V = \frac{4\pi}{r} \int_0^R s \varrho^2 d\varrho,$$

und für einen Punkt innerhalb der Kugel

$$V = \frac{4\pi}{r} \int_0^r s \varrho^2 d\varrho + 4\pi \int_r^R s \varrho d\varrho,$$

wie man leicht findet, wenn man die ganze Kugel in zwei Theile zerlegt, eine Vollkugel vom Radius r und eine darum liegende Hohlkugel. Die Potentialfunction der letztern ist constant gleich dem Werthe, den sie im Centrum hat. Ist die Dichte s constant, so hat man:

$$V_a = \frac{4\pi s R^3}{3r},$$

$$V_i = 4\pi s R^2 - \frac{2\pi s r^2}{3},$$

und hieraus ergibt sich:

$$\Delta^2 V_a = 0, \quad \Delta^2 V_i + 4\pi s = 0.$$

Das Potential der homogenen Kugel ist nach § 7:

$$\pi s^2 \iint \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) r^2 dr d\omega = \frac{16}{15} \pi^2 s^2 R^5.$$

Nun ist die Masse gleich $\frac{4\pi R^3 s}{3}$, also das Potential gleich

$$\frac{3M^2}{5R}.$$

Denkt man sich, dass die Masse M aus unendlicher Ausdehnung zu einer homogenen Kugel zusammenstürze, so wäre dies die erlangte

lebendige Kraft oder die vernichtete Arbeit. Denkt man sich diese lebendige Kraft als Wärme, welche gleichmässig durch die ganze Masse vertheilt ist, so besitzt die Masseneinheit die Wärme:

$$\frac{3M}{5R},$$

oder anders ausgedrückt: Um die Wärme der Masseneinheit zu erzeugen, müsste diese Arbeit vernichtet werden. Nimmt man als Einheit der Arbeit diejenige Arbeit an, welche man braucht, um ein Kilogramm 420 Meter von der Erdoberfläche zu entfernen, nimmt man also als Arbeitseinheit die Wärmeeinheit, so hat man, die Masse der Erde gleich E und den Radius der Erde in Metern gleich R gesetzt:

$$\frac{E}{R} - \frac{E}{R + 420} = 1,$$

und hieraus

$$E = \frac{R^2}{420}.$$

Die consumirte Arbeit und erzeugte lebendige Kraft ist demnach gleich $\frac{3R}{5 \cdot 420}$. Nun ist der Erdradius beiläufig gleich 6366000 Meter, man hat also auf die Masseneinheit beinahe 9000 Arbeitseinheiten, d. h. durch Zusammenstürzen der ganzen Erdmasse aus unendlicher Entfernung auf ihren gegenwärtigen Umfang würde eine Wärme erzeugt werden, welche hinreichend wäre, die ganze Erde, wenn sie Wasser wäre, 9000 Grad wärmer zu machen.

Die Sonne hat eine 360,000 mal grössere Masse und einen 112 mal grösseren Radius, als die Erde. Beim Zusammenstürzen der Sonnenmasse würde demnach unter gleichen Umständen eine Temperatur von

$$\frac{9000 \cdot 360,000}{112} = 29 \text{ Millionen}$$

Graden entstehen.

§ 16.

Vier weitere Sätze über die Potentialfunction.

Die Anwendung des Satzes $\sum M_1 V_2 = \sum M_2 V_1$ in § 8 giebt nun weiter folgende allgemeine Resultate.

1. Es wurde bereits oben in § 13 angegeben, dass elektrische Massen im Zustande des Gleichgewichts sich an der Oberfläche der Körper

so ansammeln, dass die Potentialfunction auf dieser Oberfläche constant wird. Ist dieser Satz richtig, so muss auch das Potential der in solcher Weise vertheilten Massen ein absolutes Maximum sein, und dies ist auch in der That der Fall. Ist die Dichte der elektrischen Massen gleich s und ihre constante Potentialfunction gleich V , so kann man eine andere Vertheilung dieser Masse analytisch dadurch darstellen, dass man noch eine andere Masse von der Dichtigkeit s' hinzufügt, deren Gesammtheit gleich Null ist. Ist nun die Potentialfunction dieser Masse V' , so ist das Potential des anders vertheilten Massensystems gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int (s + s') (V + V') d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int s V d\sigma + \frac{1}{2} \int s V' d\sigma + \frac{1}{2} \int s' V d\sigma + \frac{1}{2} \int s' V' d\sigma. \end{aligned}$$

Nun ist nach unserem Satze:

$$\int s V' d\sigma = V \int s' d\sigma = 0,$$

weil V constant und die gesammte Masse s' gleich Null ist. Ferner ist das letzte Integral das Potential des Massensystems s' , also, wie weiter unten in § 20 bewiesen werden wird, immer negativ. Das Potential eines Massensystems auf einer Oberfläche, für welches die Potentialfunction auf dieser Oberfläche constant wird, ist also ein absolutes Maximum und es kann auf einer gegebenen Fläche nur eine einzige Vertheilung einer gegebenen Masse geben, welche diese Bedingung erfüllt, denn für eine zweite Vertheilungsart, welche sich durch $s + s'$ ausdrücken lässt, wird das Potential immer kleiner, also auch kein absolutes Maximum.

2. Man denke sich ein beliebiges Massensystem M_1 , dessen Dichte s_1 und dessen Potentialfunction V_1 ist, in einer Fläche eingeschlossen; ferner denke man sich ein zweites Massensystem M_2 so vertheilt, dass in einem beliebigen ausserhalb der Fläche liegenden Punkte p sich die Masseneinheit befindet, und eine andere Masse mit der Dichtigkeit $-s_2$ auf unserer Fläche so sich verbreitet, dass das aus dem ganzen zweiten Massensystem folgende V überall auf und demgemäss auch innerhalb dieser Fläche gleich Null sei. Oder man denke sich, um die Sache in physikalische Begriffe einzukleiden, im Punkte p eine Einheit elektrischer Masse, während die Fläche F mit dem Boden in leitende Verbindung gebracht ist; denn alsdann wird im Zustande des Gleichgewichts die Potentialfunction auf der Fläche F gleich der Potentialfunction auf dem ganzen Erdboden. Letztere ist aber gleich Null, da überall po-

sitive und negative Elektricitäten mit einander verbunden sind. Man hat alsdann:

Massensystem M_1 ,
 Dichtigkeit: s_1 innerhalb F , 0 ausserhalb F ,
 Potentialfunction: V_1 überall
 Massensystem M_2 ,
 Masse: 1 im Punkt p , $-s_2$ auf F , ausserdem Null,
 Potentialfunction: Null auf und innerhalb F .

Die Anwendung unseres Satzes giebt augenblicklich, wenn man V_1 und s_2 einfach durch V und s ersetzt:

$$V_p = \int s V d\sigma.$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser Satz auch dann gilt, wenn die Massen, deren Potentialfunction zu bestimmen ist, einen Hohlraum umschliessen und der Punkt p sich innerhalb desselben befindet. Durch diese Gleichung ist nicht blos abermals der Satz § 15 Nr. 4 bewiesen, sondern auch gezeigt, wie man die Potentialfunction ausserhalb einer Masse aus der Potentialfunction auf einer beliebigen diese Masse umschliessenden Fläche bestimmt. Ist diese Fläche eine Niveaufläche, so ergiebt sich folgender Satz:

3. Die Potentialfunction für einen Punkt ausserhalb der wirkenden Massen ist gleich der gesamten Elektricität, welche eine Masseneinheit auf einer beliebigen die Massen umschliessenden Niveaufläche durch Vertheilung ansammeln würde, multiplicirt mit dem Niveau dieser Fläche. Oder auch umgekehrt:

$$\int s d\sigma = \frac{V_p}{V_1},$$

d. h. man findet die Masse der von einem Punkt p aus auf einer beliebigen Fläche inducirten Elektricität, wenn man diese Fläche mit Elektricität ladet und die Ladung ins Gleichgewicht kommen lässt; alsdann ist die Masse der inducirten Elektricität gleich dem Bruche, welchen man erhält, wenn man die Potentialfunction der auf der Oberfläche befindlichen Elektricität im Punkte p durch die Potentialfunction auf der Oberfläche dividirt. Aus diesem Satze folgt z. B., dass die Masse Elektricität, welche die im Punkte p ausserhalb einer Kugel vom Radius R concentrirte Masseneinheit auf dieser Kugel ansammelt, gleich ist

$$\frac{R}{r},$$

wenn man die Entfernung des Punktes p vom Centrum der Kugel R mit r bezeichnet.

4. Ist im Punkte p_1 die Masseneinheit concentrirt und wirkt diese auf eine isolirte Fläche F , so bildet sich auf dieser Fläche durch die Wirkung des Punktes p_1 eine Massenvertheilung, deren Dichte gleich s_1 sein soll, und $\int s_1 d\sigma = 0$.

Ferner ist innerhalb der ganzen Fläche die Potentialfunction constant. Man hat also:

$$\begin{array}{ll} \text{Massensystem } M_1, & \\ \text{Masse 1 in } p_1, & \text{Dichtigkeit } s_1 \text{ auf } F, \\ \text{Potentialfunction } C_1 \text{ auf } F, & V_1 \text{ ausserhalb } F. \end{array}$$

Denkt man sich in einem zweiten Punkte p_2 gerade so eine Masseneinheit concentrirt, so hat man:

$$\begin{array}{ll} \text{Massensystem } M_2, & \\ \text{Masse 1 in } p_2, & \text{Dichtigkeit } s_2 \text{ auf } F, \\ \text{Potentialfunction } C_2 \text{ auf } F, & V_2 \text{ ausserhalb } F. \end{array}$$

Wir haben daher, wenn wir unsere Regel anwenden:

$$V_2(p_1) = V_1(p_2).$$

Nun besteht V_1 aus zwei Theilen, aus der Potentialfunction der Masse s_1 und des Punktes p_1 ; wir haben daher, wenn wir die Potentialfunction der Masse s_1 mit U_1 und die Entfernung $p_1 p_2$ mit r bezeichnen:

$$\begin{aligned} V_1(p_2) &= U_1(p_2) + \frac{1}{r}, \\ V_2(p_1) &= U_2(p_1) + \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$U_1(p_2) = U_2(p_1).$$

5. Hat man zwei geschlossene Oberflächen F_1 und F_2 und ladet man F_1 mit Elektrizität bis zum Niveau C_1 , während F_2 mit der Erde in leitender Verbindung steht, so sammelt sich auf F_2 entgegengesetzte Elektrizität, deren Quantität i_1 heissen soll. Man hat daher:

$$\begin{array}{ll} \text{Massensystem } M_1, & \\ \text{Masse } m_1 \text{ auf } F_1, & -i_1 \text{ auf } F_2, \\ \text{Potentialfunction } C_1 \text{ auf } F_1, & 0 \text{ auf } F_2. \end{array}$$

Ladet man umgekehrt F_2 bis zum Niveau C_2 unter gleichen Umständen, so hat man:

$$\begin{array}{ll} \text{Massensystem } M_2, & \\ \text{Masse } m_2 \text{ auf } F_2, & -i_2 \text{ auf } F_1, \\ \text{Potentialfunction } C_2 \text{ auf } F_2, & 0 \text{ auf } F_1, \end{array}$$

und hieraus:

$$i_1 C_2 = i_2 C_1$$

§ 17.

Untersuchungen über die Differenzialcoefficienten der Potentialfunction innerhalb und ausserhalb der wirkenden Massen.

Die Gleichung

$$4\pi s \pm \Delta^2 V = 0$$

bildet für die Analysis die Grundlage der meisten Betrachtungen über die Potentialfunction. Es ist daher wohl gerechtfertigt, wenn wir neben dem in § 15 gegebenen Beweise auch noch einen andern mehr analytischen Beweis verlangen, und dies Verlangen erscheint um so gerechtfertigter durch folgende Betrachtung. Der Ausdruck:

$$a) \quad V = \iiint \frac{dx \, dy \, dz}{r}$$

giebt die Potentialfunction eines homogenen Körpers sowohl innerhalb, als ausserhalb desselben. Setzen wir:

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

und bilden wir nach der gewöhnlichen Regel über die Differenziation der bestimmten Integrale den Ausdruck:

$$\Delta^2 V = \frac{d^2 V}{da^2} + \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2},$$

so finden wir, dass derselbe ausserhalb wie innerhalb des Körpers gleich Null ist. Wie erklärt sich nun dieser Widerspruch?

Hat der Ausdruck a) überhaupt auch für Punkte innerhalb der Massen Geltung, das heisst: ist das Integral a) so beschaffen, dass seine Differenzialcoefficienten auch innerhalb der Massen die Projectionen der Kräfte darstellen?

Um diese Fragen zu beantworten, greifen wir zu der oben in § 15 gegebenen Definition der Potentialfunction, welche heisst:

$$V = \text{Lim} \sum \frac{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z}{[(l \Delta x - x_1)^2 + (m \Delta y - y_1)^2 + (n \Delta z - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Setzt man nun $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ und verlegt man das Coordinatencentrum in den Punkt x_1, y_1, z_1 , so hat man:

$$V = \sum \frac{\Delta^2}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

wobei l, m, n alle ganzen Zahlen durchlaufen, bis die Oberfläche erreicht ist, jedoch l, m, n nicht gleichzeitig (nach der Definition in § 7)

gleich Null gesetzt werden dürfen. Bezeichnet man den Radius, welcher vom Centrum zur Oberfläche geht, mit r' , so ist durch die Gleichung

$$r'^2 = \Delta^2 \cdot (l^2 + m^2 + n^2)$$

die Grenze der Zahlen gegeben, bis zu welchen man l , m , n zählen darf. Nimmt man nun vom Centrum aus die zunächst gelegenen Punkte, etwa bis zur Entfernung 10Δ von der Summe aus, so ist klar, dass die Anzahl aller übrigen Punkte multiplicirt mit Δ^3 kleiner ist, als der numerische Werth des ganzen Raumes, und dass ferner

$$\Delta^2 \cdot \sum \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} < \iint \varrho \, d\varrho \, d\omega < \int \frac{r'^2}{2} d\omega$$

werden muss, also einen bestimmten endlichen Werth erhält. Eine ähnliche Betrachtung stellen wir für die Differenzialcoefficienten der Potentialfunction an. Lässt man a um Δa wachsen, so wächst $\frac{1}{r}$ um $\Delta \frac{1}{r}$ und wird gleich

$$\begin{aligned} & [r^2 + 2(a-x)\Delta a + \Delta a^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + 2 \cos(rx) \frac{\Delta a}{r} + \left(\frac{\Delta a}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich, wenn $\Delta a < r$ ist, in eine convergente Reihe verwandeln von der Form:

$$\frac{1}{r} + \frac{A\Delta a}{r^2} + \frac{B\Delta a^2}{r^3} + \frac{C\Delta a^3}{r^4}.$$

Lässt man nun a um Δa , $2\Delta a$, $3\Delta a$ wachsen und bezeichnet man die entsprechenden Werthe von r mit r_1 , r_2 , r_3 , so hat man:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{A\Delta a}{r^2} + \frac{B\Delta a^2}{r^3} + \frac{C\Delta a^3}{r^4},$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{2A\Delta a}{r^2} + \frac{4B\Delta a^2}{r^3} + \frac{8C\Delta a^3}{r^4},$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r} + \frac{3A\Delta a}{r^2} + \frac{9B\Delta a^2}{r^3} + \frac{27C\Delta a^3}{r^4}.$$

Berechnet man die Differenzen dieser Reihen, so hat man:

$$\Delta^1_1 = \frac{A \Delta a}{r^2} + \frac{B \Delta a^2}{r^3} + \frac{C \Delta a^3}{r^4},$$

$$\Delta^1_2 = \frac{A \Delta a}{r^2} + \frac{3 B \Delta a^2}{r^3} + \frac{7 C \Delta a^3}{r^4},$$

$$\Delta^1_3 = \frac{A \Delta a}{r^2} + \frac{5 B \Delta a^2}{r^3} + \frac{19 C \Delta a^3}{r^4}.$$

Nimmt man die Differenzen dieser Reihen, so erhält man:

$$\Delta^2_1 = \frac{2 B \Delta a^2}{r^3} + \frac{6 C \Delta a^3}{r^4},$$

$$\Delta^2_2 = \frac{2 B \Delta a^2}{r^3} + \frac{12 C \Delta a^3}{r^4},$$

und nach abermaliger Differenzirung hat man:

$$\Delta^3 = \frac{6 C \Delta a^3}{r^4}.$$

Hieraus hat man weiter:

$$\frac{\Delta r^{-1}}{\Delta a} = \frac{A}{r^2} + \frac{B \Delta a}{r^3} + \frac{C \Delta a^2}{r^4} \dots$$

$$\frac{\Delta^2 r^{-1}}{\Delta a^2} = \frac{2 B}{r^3} + \frac{6 C \Delta a}{r^4} \dots$$

$$\frac{\Delta^3 r^{-1}}{\Delta a^3} = \frac{6 C}{r^4} \dots$$

$$\frac{\Delta^2 r^{-1}}{\Delta a^2} + \frac{\Delta^2 r^{-1}}{\Delta b^2} + \frac{\Delta^2 r^{-1}}{\Delta c^2} = \frac{G \Delta a}{r^4} + \dots$$

Setzt man nun $\Delta a = 0$, so hat man die gewöhnlichen Differenzialcoefficienten von r^{-1} so lange r einen bestimmten endlichen Werth besitzt; wenn aber r zu Δa in einem bestimmten endlichen Verhältniss steht, so hat man auch ganz andere Werthe für diese Differenzialcoefficienten, und dies ist bei allen Punkten der Fall, welche um den angegriffenen Punkt a, b, c herumliegen. Aber auch die obigen Ausdrücke sind nur unter der Voraussetzung gültig, dass $3 \Delta a < r$ sei. In Folge dieser Bemerkung muss man, wie bereits oben vorausgeschickt wurde, bei der Berechnung der Differenzialcoefficienten aus den endlichen Differenzen eine bestimmte Anzahl von Punkten um den angegriffenen Punkt ausnehmen, etwa alle Punkte, für welche $r < 10 \Delta$ ist. Für diese bestimmte Anzahl von Punkten ist $V = \Delta^2 \cdot \text{Const.}$,

$$\frac{\Delta V}{\Delta} = \Delta \cdot \text{Const.}, \quad \frac{\Delta^2 V}{\Delta^2} = \text{Const.}$$

Wenn man diese Andeutungen berücksichtigt, so erhält man:

$$\frac{dV}{da} = \text{Lim } \Delta \cdot \text{Const.} + \text{Lim} \sum \frac{A \Delta a^3}{r^2} + \text{Lim} \sum \frac{B \Delta a^4}{r^3} \dots$$

Setzt man nun für r seinen Werth $\Delta \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \text{Lim } \Delta \cdot \text{Const.} + \text{Lim } \Delta \cdot \sum \frac{A}{l^2 + m^2 + n^2} \\ &\quad + \text{Lim } \Delta \cdot \sum \frac{B}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} \dots \end{aligned}$$

Nun ist $\Delta \cdot \sum \frac{A}{l^2 + m^2 + n^2} < \iint d\varrho d\omega$ also endlich; ferner:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \sum \frac{B}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} &< \Delta \cdot \int \int \frac{B d\varrho d\omega}{\varrho} \\ &< \Delta \cdot \int B \log r' d\omega - \Delta \cdot \int B \log \Delta d\omega. \end{aligned}$$

Da $\Delta \log \Delta$ mit Δ verschwindet, so ist die Grenze dieses Ausdruckes gleich Null. Dasselbe gilt von dem Ausdruck

$$\Delta \cdot \sum \frac{C}{(l^2 + m^2 + n^2)^2},$$

sowie von allen folgenden. Wir haben daher schliesslich:

$$\frac{dV}{da} = \iiint \frac{A dx dy dz}{r} = - \iiint \frac{(a-x) dx dy dz}{r^3}$$

und sehen hieraus, dass die Differenzialcoefficienten des dreifachen Integrals V auch innerhalb des Körpers die Kräfte darstellen.

Für den zweiten Differenzialcoefficienten gestaltet sich die Rechnung ebenso. Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{da^2} &= \text{Const.} + \text{Lim} \sum \frac{B \Delta^3}{r^3} + \text{Lim} 6 \sum \frac{C \Delta^4}{r^4} \dots \\ &= \text{Const.} + \sum \frac{B}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} + 6 \sum \frac{C}{(l^2 + m^2 + n^2)^2}. \end{aligned}$$

Nun ist zwar $\sum \frac{1}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$ unendlich; daraus folgt aber

noch nicht, dass $\sum \frac{B}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}$ unendlich sein muss, da

$$2 B = 3 \cos^2 (r x) - 1$$

ist und bei der Summirung positive und negative Glieder sich heben können. Dies ist auch in der That der Fall. Denn denken wir uns aus der ganzen Masse von Punkten eine gewisse Anzahl herausgenommen, welche um den angegriffenen Punkt herum einen Würfel bilden (oder eine andere beliebige Figur, für welche man die drei Achsen vertauschen kann), so ist klar, dass für diese Anzahl von Punkten

$$\sum \cos^2 (r x) = \sum \cos^2 (r y) = \sum \cos^2 (r z),$$

somit

$$2 \sum \frac{B}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum \frac{\cos^2 (r x) + \cos^2 (r y) + \cos^2 (r z) - 1}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

sein wird.

Der folgende Ausdruck

$$\sum \frac{C}{(l^2 + m^2 + n^2)^2}$$

ist eine unendliche convergirende Reihe, also eine absolute Zahl. Denn wenn man die Summirung bis zu $l^2 + m^2 + n^2 = g^2$ ausführt, so ist der Rest aller übrigen Zahlen jedenfalls kleiner als

$$\int_{\frac{g}{2}}^{\infty} \int \frac{d\varrho}{\varrho^2} d\omega.$$

Ebenso sind alle folgenden Ausdrücke convergente Zahlenreihen, somit absolute Zahlen.

Aus dem Gesagten ergibt sich endlich auch, dass

$$\begin{aligned} \Delta^2 V &= \text{Lim} \sum \frac{G \Delta^4}{r^4} + \text{Lim} \sum \frac{H \Delta^5}{r^5} \dots + \text{Const.} \\ &= \sum \frac{G}{(l^2 + m^2 + n^2)^2} + \sum \frac{H}{(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{5}{2}}} \dots + \text{Const.} \end{aligned}$$

eine von den Dimensionen der Figur ganz unabhängige constante Zahl sein muss.

Diese Resultate lassen sich auch in folgender einfacher Weise erreichen. Verlegen wir, wie bereits oben geschehen ist, den Ursprung des Coordinatensystems in den angegriffenen Punkt, und verschieben wir es in der Richtung a um die Entfernung Δ bis zum folgenden Punkt, etwa von links nach rechts, oder, was dasselbe ist, verschieben

wir die Oberfläche, innerhalb welcher zu integrieren ist, in entgegengesetzter Richtung um Δ , so tritt auf der rechten Seite eine gewisse Anzahl von Punkten aus der Oberfläche heraus, während auf der andern Seite eine gewisse Anzahl leerer Plätze an der Oberfläche entsteht; alles Uebrige bleibt unverändert. Wenn man also den neuen Werth der Summe V berechnen will, hat man nur die auf der rechten Seite austretenden Punkte wegzunehmen und auf die linke Seite zu versetzen. Die Anzahl der ein- und austretenden Punkte ergibt sich, wenn man die Oberfläche auf diejenige Ebene projicirt, welche auf der Richtung a senkrecht steht. Bezeichnet man die Entfernung eines eintretenden Punktes vom Centrum mit r_1 , die Entfernung eines austretenden Punktes mit r_2 , so hat man:

$$\frac{\Delta V}{\Delta a} = \sum \sum \Delta^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Nun ist

$$\text{Lim} \sum \sum \Delta^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \iint dy dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

wobei die Integration über die ganze Projection der Oberfläche ausgedehnt werden muss. Dieser Ausdruck lässt sich auch eleganter dadurch gestalten, dass man die Integration anstatt über die Projection der Oberfläche auszuführen, über die Oberfläche selbst ausführt. Die Projection des Oberflächendifferenzials ist das Oberflächendifferenzial mal dem Cosinus des Winkels, den die Normale mit der Richtung a macht. Denkt man sich diese Normale an der Oberfläche überall nach aussen gerichtet, so ist der Cosinus dieses Winkels da, wo die Punkte aus der Oberfläche heraustreten, positiv, und da, wo sie hineintreten, negativ. Man hat daher ganz einfach:

$$a) \quad \frac{dV}{da} = - \int \frac{d\sigma \cos(na)}{r}.$$

Dieses Integral gilt überhaupt für Punkte innerhalb wie ausserhalb des Körpers. Der erste Differenzialcoefficient eines homogenen Körpers ist also gleich der Potentialfunction einer über die Oberfläche dieses Körpers verbreiteten Masse, sowohl innerhalb als ausserhalb dieses Körpers. Hieraus folgt der wichtige Satz, dass die Differenzialcoefficienten der Potentialfunction eines homogenen Körpers weder innerhalb noch ausserhalb desselben eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden können.

Denn betrachten wir den obigen Ausdruck a), so finden wir, dass $d\sigma$ und $\cos(na)$ von den Coordinaten a, b, c unabhängig sind. Wir haben also, wenn wir die höheren Differenzialcoefficienten von V suchen wollen, nur r unter dem Integralzeichen zu differenziren, und da die höheren Differenzialcoefficienten von $\frac{1}{r}$ stets endlich bleiben, so lange r nicht gleich Null wird, so sehen wir in der That, dass die Potentialfunction eines homogenen Körpers weder innerhalb noch ausserhalb in ihren höheren Differenzialcoefficienten eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

Hat man also eine Function, welche die Potentialfunction für irgend einen kleinen Raum innerhalb des homogenen Körpers darstellt, so gilt diese Function auch innerhalb des ganzen Körpers bis zur Oberfläche. Die Bemerkung, dass man, anstatt den angezogenen Punkt um da zu verrücken, auch den angezogenen Punkt feststehen lassen und den ganzen Körper in entgegengesetzter Richtung verschieben kann, übersetzt sich in der Analysis folgendermassen:

$$\frac{d}{da} F(a-x) = - \frac{d}{dx} F(a-x).$$

Wir haben daher:

$$\frac{d}{da} \int \frac{dx dy dz}{r} = - \int dx dy dz \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right)$$

und durch Integration:

$$\frac{dV}{da} = \int \int dy dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Differenzirt man den Ausdruck a) weiter, so erhält man:

$$\frac{d^2 V}{da^2} = - \int \frac{d\sigma \cos(rn) \cos(na)}{r^2}$$

(weil dr negativ wird, wenn man a um da wachsen lässt) und da

$$\cos(rn) = \cos(rn) \cos(na) + \cos(rb) \cos(nb) + \cos(rc) \cos(nc),$$

so hat man:

$$\Delta^2 V = - \int \frac{d\sigma \cos(rn)}{r^2}.$$

Unter der Richtung r ist die vom angezogenen Punkt ausgehende Richtung zu verstehen und unter der Richtung n die von der Oberfläche auswärts gerichtete Normale. Wenn daher der vom Punkt aus-

gehende Radius aus der Oberfläche austritt, ist $\cos(rn)$ positiv, in umgekehrtem Fall negativ. Es ist daher:

$$\frac{d\sigma \cos(rn)}{r^2} = \pm d\omega,$$

wobei das obere Zeichen gilt, wenn der Radius austritt, das untere, wenn er eintritt. Liegt der angezogene Punkt ausserhalb des Körpers, so tritt der Radius einmal ein und einmal aus; es ist also $\Delta^2 V = 0$. Liegt der angezogene Punkt innerhalb, so tritt der Radius nach allen Richtungen nur einmal aus, und es ist: $\Delta^2 V = -4\pi$.

§ 18.

Fortsetzung und Anwendung der gewonnenen Resultate.

Es bleibt nun noch übrig, zu untersuchen, wie sich die Differenzialcoefficienten in der Oberfläche selbst und beim Durchschreiten derselben verhalten. Hierbei wollen wir aber die Untersuchung etwas allgemeiner machen. Die Potentialfunction kann sich nämlich nicht blos dadurch ändern, dass sich der Ort des angegriffenen Punktes bewegt, sondern auch so, dass der angegriffene Punkt fest bleibt, dagegen die Gestalt der Oberfläche sich ändert. Die Gleichung einer Oberfläche ist allgemein:

$$F(x, y, z, p, q \dots) = 0,$$

wobei x, y, z die Coordinaten eines Oberflächenpunktes, p und q dagegen constante Zahlen, sogenannte Parameter bedeuten. Nun kann man aber auch diese Parameter veränderlich ansehen. So ist z. B. die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} - 1 = 0,$$

wobei p, q, r die drei Achsen bedeuten. Diese drei Achsen sind also Parameter. Denkt man sich einen dieser Parameter, z. B. p , veränderlich, so verändert sich auch das Ellipsoid in der Art, dass die in der Richtung x liegende Achse sich beständig vergrössert, während die übrigen gleich bleiben. Der Fall, wenn die Oberfläche fest bleibt, der angegriffene Punkt aber sich bewegt, ist nur ein specieller Fall dieser allgemeinen Betrachtungsweise; denn es ist, wie bereits oben bemerkt wurde, ganz gleich, ob man den angegriffenen Punkt in einer Richtung bewegt und die Oberfläche fest lässt, oder ob man den Punkt fest lässt, die Oberfläche aber in der entgegengesetzten Richtung bewegt. Ist die ursprüngliche Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$, so ist die

Gleichung derselben Fläche, wenn man den angegriffenen Punkt in der Richtung der x -Achse um a verschiebt:

$$F(x + a, y, z) = 0.$$

Hier erscheint also die Coordinate a als Parameter. Aendert sich der Parameter p eines Körpers um dp , so setzt sich auf der Oberfläche eine neue Schicht an, deren Dicke dn ist, und es ist offenbar, dass

$$\frac{dV}{dp} = \int \frac{d\sigma}{r} \cdot \frac{dn}{dp}$$

sein wird. Lässt man a um da wachsen, d. i. verschiebt man den Körper in der Richtung X um $-da$, so ist $dn = -\cos(nx) da$; es ist also $\frac{dn}{da} = -\cos(nx)$ und:

$$\frac{dV}{da} = - \int \frac{d\sigma}{r} \cos(nx),$$

wie oben.

Wenn man den angegriffenen Punkt um die Entfernung Δ verschiebt, so wachsen alle r um Δr und die Differenz der beiden Werthe von $\frac{dV}{dp}$, welche den beiden Punkten entsprechen, ist:

$$\Delta \frac{dV}{dp} = \int d\sigma \frac{dn}{dp} \left(\frac{1}{r + \Delta r} - \frac{1}{r} \right).$$

So lange nun $\Delta r < r$ ist, lässt sich $(r + \Delta r)^{-1}$ in eine nach den positiven Potenzen von Δr fortschreitende Reihe auflösen und man hat:

$$\Delta \frac{dV}{dp} = \int d\sigma \frac{dn}{dp} \frac{\Delta r}{r^2} \left(-1 + \frac{\Delta r}{r} \dots \right).$$

Der Ausdruck in der Klammer, den wir mit C bezeichnen wollen, bleibt immer endlich. Wenn wir nun ins sphärische Coordinatensystem transformiren, erhalten wir wie oben im vorigen Paragraphen:

$$\Delta \frac{dV}{dp} = \int C \Delta r \frac{dn}{dp} \cos(rn) d\omega.$$

Dieser Ausdruck verschwindet mit Δr ; es erleidet also $\frac{dV}{dp}$ keine Unterbrechung der Stetigkeit, wenn die beiden Punkte, für welche man die Differenz $\Delta \frac{dV}{dp}$ berechnet, beide innerhalb oder ausserhalb der Oberfläche liegen. Denn alsdann kann man Δr immer so wählen,

dass es kleiner wird, als der kleinste Werth von r . Wenn aber der eine Punkt innerhalb, der andere ausserhalb liegt, so muss es eine Reihe von Punkten auf der Oberfläche geben, für welche $r < \Delta r$ ist. Beschreibt man nun von dem ersten Punkt aus eine Kugelfläche mit dem Radius Δ , so schneidet diese auf der Oberfläche einen Kreis aus, dessen Radius höchstens gleich Δ und innerhalb dessen $r < \Delta$ ist. Integriert man nun innerhalb dieses Kreises mit Hülfe des sphärischen Coordinatensystems, so erhält man:

$$\int r \cos(rn) d\omega \frac{dn}{dp},$$

und dieses Integral verschwindet, wenn man die beiden Punkte, für welche man $\Delta \frac{dV}{dp}$ berechnet, in der Oberfläche selbst von beiden Seiten

zusammenrücken lässt. Der erste Differenzialcoefficient $\frac{dV}{dp}$ kann also nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. — Anders ist dies mit dem folgenden Differenzialcoefficienten. Wenn man noch einmal nach einem andern Parameter q differenzirt, erhält man:

$$\frac{d^2 V}{dp dq} = \frac{d}{dq} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dn}{dp}.$$

Um diesen Differenzialcoefficienten zu entwickeln, bedienen wir uns am bequemsten des nachstehend erörterten Coordinatensystems. Lassen wir nämlich den Parameter q wachsen, so erhalten wir ein System von Flächen. Denken wir uns auf diesen Flächen zwei Liniensysteme, welche sich in den Richtungen der beiden Hauptkrümmungen überall rechtwinklig durchschneiden, und errichten wir über diesen Linien Flächen, welche auf den Flächen q senkrecht stehen, so erhalten wir zwei weitere Flächensysteme, deren Parameter l und m heissen sollen. Die Parameter q, l, m sind also die Coordinaten eines orthogonalen Coordinatensystems. Das Oberflächenelement $d\sigma$ ist, wenn wir uns an das in § 4 Gesagte erinnern, gleich: $dn l \cdot dn m$. Bezeichnet man die Hauptkrümmungsradien der Fläche q mit ϱ_1 und ϱ_2 , so wird, wenn wir q um dq wachsen lassen, die eine Seite des Rechtecks $dn l \cdot dn m$ zu $\left(\frac{\varrho_1 + dn q}{\varrho_1}\right) dn l$ und die andere Seite zu $\left(\frac{\varrho_2 + dn q}{\varrho_2}\right) dn m$; es wird also $d\sigma$ zu:

$$d\sigma + d\sigma dn q \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right).$$

Man erhält daher schliesslich, da r im neuen Coordinatensystem eine Function von q, l, m ist:

$$\frac{d^2 V}{dp dq} = \int \frac{d\sigma dn}{r dp} \cdot \frac{dn}{dq} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) - \int \frac{d\sigma dn}{r^2 dp} \cdot \frac{dr}{dq} + \int \frac{d\sigma d(\Delta p)^{-1}}{r dq}$$

Berechnen wir nun die Differenz des zweiten Differenzialcoefficienten, so verschwindet das erste und dritte Integral, wie wir bereits gesehen haben. Es kommt also nur das zweite Integral in Betracht. Wenn wir alle Punkte der Oberfläche, für welche $\Delta r > r$ ist, von der Integration ausnehmen, so ist die Differenz dieses Integrals gleich

$$\int \frac{dn}{dp} \cdot \frac{dr}{dq} d\sigma \frac{\Delta r}{r^3} C,$$

wobei wieder C einen endlich bleibenden Coefficienten bedeutet. Bei der Transformation ins sphärische System wird dieses Integral zu

$$\int \frac{dn}{dp} \cdot \frac{dr}{dq} \cdot C \frac{d\omega \Delta r}{r \cos(rn)}.$$

Dieses Integral verschwindet nur so lange, als Δr von einer höheren Ordnung ist, als r , was z. B. dann der Fall ist, wenn $r > \sqrt{\Delta}$ ist. Man muss also von einem der angegriffenen Punkte aus eine Kugel mit dem Radius $\sqrt{\Delta}$ beschreiben und innerhalb des durch diese Kugel aus der Oberfläche ausgeschnittenen Stückes integrieren. Das Integral $\int \frac{d\sigma}{r^2}$

wird im sphärischen Coordinatensystem zu $\int \frac{d\omega}{\cos(rn)}$, wobei jedoch $\cos(rn)$ immer positiv zu verstehen ist. Nun ist, wie wir im § 4 gesehen haben, $\cos(rn) = \frac{dr}{dn}$. Liegt nun der betrachtete Punkt innerhalb der Oberfläche, so ist dieses Integral gleich

$$\int d\omega \frac{dn}{dr},$$

liegt es aber ausserhalb der Oberfläche, so ist es gleich

$$- \int d\omega \frac{dn}{dr},$$

weil im letzten Falle, wenn dn nach aussen wächst, $\frac{dr}{dn}$ negativ wird.

Geht man nun im Coordinatensystem q, l, m von einem Punkt in der Oberfläche q in der Richtung der Normale zu einem Punkt in der Ober-

fläche $q + dq$ über, so bleiben die Coordinaten l und m unverändert; wir haben daher:

$$\frac{dr}{dn} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dn}.$$

Das Integral

$$- \int \frac{d\sigma}{r^2} \frac{dn}{dp} \cdot \frac{dr}{dq}$$

beschränkt sich nun auf eine Kreisfläche vom Radius $\sqrt{A}$; es wird daher zu

$$- \frac{dn}{dp} \cdot \frac{dn}{dq} \int d\omega$$

für einen innerhalb gelegenen Punkt, und zu

$$\frac{dn}{dp} \cdot \frac{dn}{dq} \int d\omega$$

für einen ausserhalb gelegenen Punkt. Der sphärische Raum, innerhalb dessen zu integrieren ist, ist gleich dem Schwinkel, unter welchem ein Kreis von dem Durchmesser $\sqrt{A}$ erscheint, wenn man ihn in der Entfernung A über seinem Centrum betrachtet. Lässt man nun die beiden Punkte, für welche man die Differenz der Differenzialcoefficienten bestimmen will, in der Oberfläche zusammenrücken, so erstrecken sich beide Integrationen zusammengenommen über den ganzen Horizont und man hat:

$$\text{Lim } A \frac{d^2 V}{dp dq} = - 4\pi \frac{dn}{dp} \cdot \frac{dn}{dq}.$$

Der zweite Differenzialcoefficient erleidet also in der Oberfläche unter allen Umständen eine Unterbrechung der Stetigkeit und hieraus ergeben sich folgende Consequenzen.

1. Will man mit Hilfe des Taylor'schen Satzes, vom Werthe $V(o)$ ausgehend, den Werth $V(p)$ bestimmen, so darf man dies nur unter der Voraussetzung thun, dass beim Wachsen der Oberfläche von o zu p diese den angegriffenen Punkt nicht überschreitet. Entwickelt man z. B. die Potentialfunction eines Rotationsellipsoids in eine nach den Potenzen der Excentricität fortschreitende Reihe, so gilt diese nur so lange, als das Ellipsoid, während seine Excentricität von o zu p wächst, den angegriffenen Punkt nicht überschreitet.

2. Ist einer von den beiden Parametern eine Coordinate des angegriffenen Punktes, z. B. $p = a$, so ist, wie bereits oben erwähnt wurde, $\frac{dn}{da} = -\cos(na)$, also:

$$\text{Lim } \Delta \frac{d^2 V}{da^2} = -4\pi \cos^2(na),$$

$$\text{Lim } \Delta (\Delta^2 V) = -4\pi.$$

3. Wir hatten oben:

$$\frac{dV}{dp} = \int \frac{d\sigma}{r} \cdot \frac{dn}{dp}.$$

Setzt man $\frac{dn}{dp} = s$, so ist $\frac{dV}{dp}$ die Potentialfunction einer Oberfläche, die man mit Masse von der Dichte s bedeckt.

$$\frac{d^2 V}{da dp} = \frac{d}{da} \int \frac{d\sigma s}{r}$$

ist alsdann die Wirkung einer solchen Oberfläche in der Richtung a . Aus dem Ausdruck:

$$\text{Lim } \Delta \frac{d^2 V}{da dp} = -4\pi s \cos(na)$$

sehen wir, dass diese Wirkung beim Ueberschreiten der Oberfläche sich sprungweise ändert. Ist die Richtung a die Richtung der Normale, so haben wir auch, wie wir bereits in § 15 gesehen haben:

$$-4\pi s = \frac{dV}{dn a} + \frac{dV}{dn i}.$$

Ist, wie wir uns dies bei der Elektrizität vorstellen, der Stoff auf der Oberfläche in der Weise vertheilt, dass die Potentialfunction innerhalb derselben constant ist, also innerhalb derselben keine Wirkung stattfindet, so findet ausserhalb die Wirkung in der Richtung der Normale statt und ist gleich $4\pi s$. Denn für die Elektrizität wird, wie wir in § 14 gesehen haben, die Kraftfunction $-r^{-1}$.

§ 19.

Transformation des Ausdrucks Δ^2 in andere Coordinatensysteme.

1. Für die Folge werden wir in der Lage sein, von der Transformation des Ausdrucks Δ^2 ins sphärische Coordinatensystem Gebrauch zu machen, und wir wollen daher jetzt diese Transformation vornehmen.

Im sphärischen System ist das Raumdifferenzial ein Parallelepipedum, dessen drei Seiten gleich dr , $r d\zeta$, $r \sin \zeta d\varphi$ sind. Die Oberfläche der auf dem Radius r senkrecht stehenden Fläche ist $r^2 \sin \zeta d\zeta d\varphi$; das auf dieser Fläche senkrecht stehende Gefälle ist $\frac{du}{dr}$; durch diese Fläche dringt also die Wärme

$$- r^2 \sin \zeta d\zeta d\varphi \frac{du}{dr}$$

in das Raumelement ein, auf der andern Seite tritt die Wärme

$$r^2 \sin \zeta d\zeta d\varphi \frac{du}{dr} + dr \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \sin \zeta d\zeta d\varphi \frac{du}{dr} \right)$$

in das Raumelement ein. Die durch beide Flächen eintretende Wärme ist also:

$$dr \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \sin \zeta d\zeta d\varphi \frac{du}{dr} \right),$$

und die eintretende Temperaturerhöhung:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr},$$

durch das Flächenelement $r dr \sin \zeta d\varphi$ tritt die Wärme

$$- r dr \sin \zeta d\varphi \frac{du}{r d\zeta}$$

ein, weil das Gefälle auf dieser Fläche gleich $\frac{du}{r d\zeta}$ ist. Auf der entgegengesetzten Seite tritt ein die Wärme:

$$dr \sin \zeta d\varphi \frac{du}{d\zeta} + d\zeta \cdot \frac{d}{d\zeta} \left(dr \sin \zeta d\varphi \frac{du}{d\zeta} \right).$$

Die Temperaturzunahme ist also

$$\frac{1}{r^2} \left(\cotg \zeta \frac{du}{d\zeta} + \frac{d^2 u}{d\zeta^2} \right).$$

Durch das Flächenelement $r dr d\zeta$ endlich tritt die Wärme ein

$$- \frac{dr d\zeta du}{\sin \zeta d\varphi},$$

weil das Gefälle auf diesem Flächenelement gleich $\frac{du}{r \sin \zeta d\varphi}$ ist; auf der andern Seite tritt die Wärme

$$\frac{dr}{\sin \zeta} \frac{d\zeta}{d\varphi} \frac{du}{d\varphi} + d\varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{\sin \zeta} \frac{d\zeta}{d\varphi} \frac{du}{d\varphi} \right)$$

ein; die Temperaturzunahme ist also:

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \zeta} \frac{d^2 u}{d\varphi^2}.$$

Der Ausdruck $\Delta^2 u$ lautet demnach ins sphärische System transformirt:

$$a) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \cotg \zeta \frac{du}{d\zeta} + \frac{d^2 u}{\sin^2 \zeta d\varphi^2} \right).$$

2. Denkt man sich auf den Niveauflächen der Potentialfunction Linien gezogen, welche in den Richtungen der beiden Hauptkrümmungen laufen, und auf diesen, wie in § 18, senkrechte Flächen errichtet, so erhält man ein Coordinatensystem, welches sich vorzugsweise zur Transformation von Δ^2 eignet. Bezeichnet man das Flächenelement auf der Niveaufläche mit $d\sigma$, so ist das Körperelement $d\sigma dn$. Nun tritt bloß durch die Fläche $d\sigma$ und die entgegengesetzte Fläche $d\sigma + d(d\sigma)$ Wärme ein, weil auf den anderen Flächen das Gefälle gleich Null ist. Durch die Fläche $d\sigma$ tritt ein die Wärme

$$-d\sigma \frac{du}{dn},$$

und durch die entgegengesetzte Fläche die Wärme

$$d\sigma \frac{du}{dn} + dn \cdot \frac{d}{dn} \left(d\sigma \frac{du}{dn} \right).$$

Man hat also:

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dn^2} + \frac{du}{dn} \cdot \frac{1}{d\sigma} \cdot \frac{d(d\sigma)}{dn},$$

oder weil $\frac{du}{dn}$ das Gefälle ist:

$$\Delta^2 u = \frac{d \Delta u}{dn} + \frac{\Delta u}{d\sigma} \frac{d(d\sigma)}{dn}.$$

Wie wir bereits in § 18 gesehen haben, ist:

$$\frac{d(d\sigma)}{dn} = d\sigma \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right).$$

Wir haben also auch:

$$b) \quad \Delta^2 u = \frac{d \Delta u}{dn} + \Delta u \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right).$$

Da nun $\Delta^2 u = -4\pi s$ ist, so haben wir auch:

$$4\pi s + \frac{dK}{dn} + K\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = 0,$$

wenn wir mit K die Kraft bezeichnen, welche gleich dem Gefälle Δu ist. Ist die Niveaufläche z. B. eine Kugelfläche vom Radius r , so hat man:

$$4\pi s + \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0.$$

3. Hat man überhaupt allgemein ein Coordinatensystem p, q, r , so dass p, q, r die Parameter von Flächen sind, die durch die Gleichungen

$$p = f(x, y, z); \quad q = \varphi(x, y, z); \quad r = v(x, y, z)$$

ausgedrückt werden, so ist:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{du}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{dr}{dx}.$$

Denn wenn man in der Gleichung $u = f(p, q, r)$ x um dx wachsen lässt, so wächst p um $\frac{dp}{dx} dx$ u. s. f. Ferner hat man nach derselben

Regel:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} \right) \\ &= \frac{du}{dp} \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dp^2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 u}{dp dq} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{d^2 u}{dp dr} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dr}{dx}. \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Formel q und r statt p und addirt die so erhaltenen drei Formeln, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{du}{dp} \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} + \frac{du}{dq} \cdot \frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{d^2 r}{dx^2} \\ &+ \frac{d^2 u}{dp^2} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 u}{dq^2} \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 u}{dr^2} \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \\ &+ \frac{2 d^2 u}{dp dq} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dq}{dx} + \frac{2 d^2 u}{dp dr} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dr}{dx} + \frac{2 d^2 u}{dq dr} \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dr}{dx}. \end{aligned}$$

Setzt man ferner in dieser Formel y und z statt x und addirt die drei so entstehenden Formeln, so hat man $\Delta^2 u$. Der Ausdruck hierfür vereinfacht sich bedeutend, wenn das Coordinatensystem ein orthogonales ist. Denn nach § 3 ist

$$\frac{dp}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{dp}{dy} \frac{dq}{dy} + \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz}$$

das Product der Gefälle der beiden Functionen p und q multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den ihre Richtungen bilden. Im orthogonalen Coordinatensystem ist also dieser Ausdruck gleich Null und wir erhalten die elegante Formel:

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dp^2} (\Delta p)^2 + \frac{d^2 u}{dq^2} (\Delta q)^2 + \frac{d^2 u}{dr^2} (\Delta r)^2 \\ + \frac{du}{dp} \Delta^2 p + \frac{du}{dq} \Delta^2 q + \frac{du}{dr} \Delta^2 r.$$

Als Beispiel zum Gebrauche dieser Formel diene wieder die Transformation ins sphärische Coordinatensystem, welches orthogonal ist. Seine Parameter sind r, ζ, φ . Das Gefälle von r ist 1, von $\zeta = \frac{1}{r}$, von $\varphi = \frac{1}{r \sin \zeta}$. Die Ausdrücke $\Delta^2 p$ u. s. f. sind ebenfalls durch geometrische Betrachtungen leicht zu ermitteln; denn sie sind gleich den Zunahmen der Temperaturen, welche eintreten, wenn man die Flächen r, ζ, φ als Flächen gleicher Temperatur betrachtet und

$$u = r; \quad u = \zeta; \quad u = \varphi$$

setzt. Nun ist nach b), wenn man $u = r$ setzt:

$$\Delta u = 1; \quad \frac{d \Delta u}{dn} = 0; \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{r},$$

also:

$$\Delta^2 r = \frac{2}{r}.$$

Ferner ist, wenn man $u = \zeta$ setzt, $\Delta u = \frac{1}{r}$ in der Richtung der Normale auf ζ constant, also $\frac{d \Delta u}{dn} = 0$. Für $u = \zeta$ hat man $d\sigma = r \sin \zeta dr d\varphi$. Lässt man ζ um $d\zeta$ wachsen, so wächst $d\sigma$ um $r \cos \zeta dr d\varphi d\zeta$; nun ist $dn = r d\zeta$; es ist also:

$$\frac{1}{d\sigma} \frac{d(d\sigma)}{dn} = \frac{\cotg \zeta}{r} \quad \text{und} \quad \Delta^2 \zeta = \frac{\cotg \zeta}{r^2}.$$

Setzt man $u = \varphi$, so hat man: $\Delta u = \frac{1}{r \sin \zeta}$ in der Richtung der Normale constant; es ist also $\frac{d \Delta u}{dn} = 0$; ferner ist die Krümmung der Coordinatenebene φ gleich Null, also $\Delta^2 \varphi = 0$. Durch Vereinigung dieser Resultate erhalten wir die Gleichung a).

§ 20.

Analytischer Beweis der allgemeinen Sätze über die Potentialfunction.

Es sollen nunmehr auch die Sätze, welche in § 15 aus allgemeinen Betrachtungen entwickelt worden sind, analytisch nachgewiesen werden.

1. Da $4\pi s = -\Delta^2 V$ ist, so ist auch die gesammte Masse gleich

$$M = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta^2 V$$

und die Integration kann über einen beliebigen Raum erstreckt werden, welcher alle Massen einschliesst. Nun erhalten wir durch Integration:

$$\int \frac{d^2 V}{dx^2} dx dy dz = - \int dy dz \left(\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} \right),$$

was sich nach § 17 auch als ein über die ganze Oberfläche zu nehmen- des Doppelintegral ausdrücken lässt durch

$$\int d\sigma \frac{dV}{dx} \cos(nx).$$

Nun ist

$$\frac{dV}{dx} \cos(nx) + \frac{dV}{dy} \cos(ny) + \frac{dV}{dz} \cos(nz)$$

nach den in § 3 gegebenen Erläuterungen gleich dem Gefälle von V in der Richtung der Normale; wir haben daher:

$$M = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dV}{dn} d\sigma$$

gerade wie in § 15 Nr. 6.

2. Das Potential ist nach § 7 gleich $\frac{1}{2} \int s V$, d. i. gleich

$$P = -\frac{1}{8\pi} \int V \Delta^2 V.$$

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\int V \frac{d^2 V}{dx^2} dx dy dz = \int dy dz V \left(\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} \right) - \int \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 dx dy dz.$$

Wir haben somit:

$$P = -\frac{1}{8\pi} \int V \frac{dV}{dn} d\sigma + \frac{1}{8\pi} \int (\Delta V)^2,$$

wobei das erste Integral über die ganze die Massen umschliessende Oberfläche, das andere über den ganzen von dieser Oberfläche umschlossenen Raum sich erstreckt. Ist diese Oberfläche eine Niveaufläche, so wird nach Nr. 1 dieses Paragraphen

$$P = \frac{1}{2} M V_1 + \frac{1}{8\pi} \int (\Delta V)^2,$$

wobei V_1 die Potentialfunction auf der gegebenen Niveaufläche bedeutet. In unendlicher Entfernung ist $V_1 = 0$, wir haben also:

$$P = \frac{1}{8\pi} \int (\Delta V)^2,$$

d. h. das Potential einer Masse ist gleich dem Integral aller von dieser Masse im unendlichen Raum ausgeübten Kräfte im Quadrat dividirt durch 8π .

Das Potential eines elektrischen Massensystems ist immer negativ, weil für die Elektrizität $4\pi s = \Delta^2 V$ ist.

Integrirt man zwischen zwei aufeinanderfolgenden Niveauflächen, so erhält man:

$$\int (\Delta V)^2 = \int \frac{dV}{dn} \cdot \frac{dV}{dn} \cdot dn d\sigma = -4\pi M dV$$

und hat daher, wenn man noch nach V von der Fläche V_1 bis ins Unendliche integrirt:

$$\int (\Delta V)^2 = 4\pi M V_1,$$

d. h. die Quadratsumme aller Kräfte, welche die von einer Niveaufläche eingeschlossene Masse M ausserhalb dieser Fläche ausübt, ist gleich der Masse multiplicirt mit dem Niveau dieser Fläche mal 4π .

3. Der Satz in § 8

$$\int s_1 V_2 = \int s_2 V_1$$

lautet mit Hülfe der Grundgleichung für die Dichtigkeit, wenn man die Potentialfunctionen der beiden Massen mit U und V bezeichnet:

$$\int U \Delta^2 V = \int V \Delta^2 U.$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int U \Delta^2 V = \int U \frac{dV}{dn} d\sigma - \int \left(\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy} \cdot \frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dV}{dz} \right) dv,$$

wenn man die Integration über den Raum mit dv bezeichnet. Diese Formel lässt sich (vergl. den vorigen Paragraphen) auch noch kürzer ausdrücken durch:

$$a) \quad \int U \Delta^2 V = \int U \frac{dV}{dn} d\sigma - \int \Delta U \Delta V \cos(UV) dv.$$

Man hat hieraus:

$$\int U \Delta^2 V - \int V \Delta^2 U = \int U \frac{dV}{dn} d\sigma - \int V \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

In unendlicher Entfernung wird $U = V = 0$; es ist also die obige Gleichung bewiesen.

Setzt man in a) $U = \frac{1}{r}$, wobei r die Entfernung von einem beliebigen festen Punkte p zu einem beliebigen beweglichen Punkte im Raume bedeutet, so hat man:

$$\int \frac{\Delta^2 V}{r} = \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} - \int \Delta V \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \cos(Vr) dv.$$

Nun ist das Gefälle von $\frac{1}{r}$ gleich $-\frac{1}{r^2}$, ferner ist nach § 3

$$\Delta V \cos(Vr) = \frac{dV}{dr};$$

wählt man nun noch zur Integration das sphärische Coordinatensystem, dessen Centrum in p ist, so hat man:

$$A) \quad \int \frac{\Delta^2 V}{r} = \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \int \frac{dV}{dr} \cdot dr d\omega.$$

Nun muss man zwei Fälle unterscheiden. Liegt der Punkt p innerhalb der Oberfläche und integrirt man aus unendlicher Entfernung bis zu dieser Oberfläche, so hat man:

$$b) \quad \int \frac{\Delta^2 V}{r} = - \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} - \int V d\omega.$$

Integrirt man von der Oberfläche zum Punkte p , so hat man:

$$c) \quad \int \frac{\Delta^2 V}{r} = \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \int V d\omega - 4\pi V_p.$$

Ueber den unendlichen Raum integrirt hat man daher:

$$d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{\Delta^2 V}{r} = -4\pi V_p \\ \text{oder} \\ \Delta^2 V = -4\pi s, \end{array} \right.$$

womit auf's Neue die Grundgleichung § 15 Nr. 1 bewiesen ist. Denn die Dichtigkeit s ist eine Function von der Eigenschaft

$$\int \frac{s}{r} = V_p,$$

wenn man über den unendlichen Raum integrirt.

Liegt der Punkt p ausserhalb der Oberfläche, so hat man über diese integrirt:

$$e) \quad \int \frac{\Delta^2 V}{r} = \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \int V d\omega.$$

Ist die Fläche eine die Massen umschliessende Niveaufläche, so wird (vergl. § 17) das letzte Integral gleich Null, und man hat:

$$-4\pi V_p = \int \Delta V \frac{d\sigma}{r},$$

womit der Satz § 15 Nr. 7 von Neuem bewiesen ist.

Nach b) hat man innerhalb einer solchen Niveaufläche:

$$\int \Delta V \frac{d\sigma}{r} = -4\pi V_1,$$

womit der Satz § 15 Nr. 8 von Neuem bewiesen wird.

Befindet sich die Niveaufläche innerhalb der wirkenden Massen, so dass sie von diesen umschlossen wird, so hat man nach b):

$$4\pi V_p = \int \Delta V \frac{d\sigma}{r} + 4\pi V_1.$$

Es ist also auf der ganzen Niveaufläche das Integral gleich Null. Ist aber auf einer Niveaufläche dieses Integral gleich Null, so ist es auch innerhalb derselben gleich Null, wie soeben bewiesen wurde; man hat daher innerhalb einer leeren Niveaufläche

$$V_p = V_1,$$

wie auch in § 15 Nr. 2 bereits gesagt wurde.

Die Gleichung a), mit Hülfe deren wir die meisten und wichtigsten Sätze über die Potentialfunction soeben bewiesen haben, gewinnt

man in anschaulicher Weise auch durch folgende Betrachtung: Setzt man in § 14 $\kappa = V$ und $u = U$, so hat man:

$$\frac{dU}{dt} = V \Delta^2 U + \frac{dV}{dx} \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} \frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dz} \frac{dU}{dz}.$$

Der Ausdruck rechts stellt also, über einen geschlossenen Raum integriert, die Zunahme der Gesamtwärme des Raumes dar, wenn sich innerhalb desselben keine Wärmequelle befindet. Ist dies aber der Fall, so kann eine Zunahme der Gesamtwärme nur durch die von aussen eintretende Wärme stattfinden; diese ist aber gleich: $\int V \frac{dU}{dn} d\sigma$.

Anmerkung. Da für Gleichung A) das Coordinatensystem so gewählt wurde, dass dessen Centrum mit dem Punkte a, b, c zusammenfällt, so wird

$$\frac{V(x, y, z)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{1}{2}}} \text{ zu } \frac{V(a-x, b-y, c-z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man das von a, b, c nunmehr unabhängige r durch ϱ bezeichnet und zugleich berücksichtigt, dass $\Delta^2 V$ auf a, b, c bezogen gleich $\Delta^2 V$ auf x, y, z bezogen ist, so lautet die Gleichung A):

$$\Delta^2 \int \frac{V}{\varrho} dv = \int \frac{1}{\varrho} \frac{dV}{dn} d\sigma + \int \frac{dV}{d\varrho} \cdot d\varrho d\omega.$$

Integriert man nun innerhalb einer Kugel vom Radius t , so hat man:

$$\Delta^2 \int \frac{V}{\varrho} dv = \int \frac{dV}{dt} t d\omega + \int V d\omega - 4\pi V(a, b, c),$$

oder:

$$\Delta^2 \int \frac{V}{\varrho} dv = \frac{d}{dt} \int V t d\omega - 4\pi V(a, b, c).$$

Differenziert man noch einmal nach t , so wird das Integral links gleich t^2 mal dem Integral des Werthes $\frac{V}{\varrho}$ auf der Oberfläche der Kugel vom Radius t , also gleich $\Delta^2 \int V t d\omega$, und man hat:

$$\alpha) \quad \Delta^2 \int V t d\omega = \frac{d^2}{dt^2} \int V t d\omega.$$

Dies ist eine Auflösung der für die Elasticitätslehre so wichtigen Differenzialgleichung

$$\Delta^2 U(a, b, c, t) = \frac{d^2}{dt^2} U(a, b, c, t),$$

woraus man sogleich auch die Auflösung der allgemeineren Gleichung

$$\kappa^2 \Delta^2 U = \frac{d^2 U}{dt^2}$$

ableiten kann, wenn man κt für t setzt.

Die Gleichung $\alpha)$ giebt eine Auflösung, die für $t=0$ in $U=0$ und $\frac{dU}{dt} = 4\pi V$ übergeht. Will man eine Auflösung haben, die für $t=0$ in $U=4\pi V$ und $\frac{dU}{dt} = 0$ übergeht, so braucht man nur die Gleichung $\alpha)$ nach t zu differenzieren; denn alsdann wird für $t=0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int V t d\omega &= 4\pi V, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int V t d\omega &= \Delta^2 \int V t d\omega = 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Auflösung der Gleichung

$$\Delta^2 U = \frac{d^2 U}{dt^2},$$

welche für $t=0$ in zwei gegebene Functionen $U = F$ und $\frac{dU}{dt} = V$ übergeht, lautet daher:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int F t d\omega + \frac{1}{4\pi} \int V t d\omega.$$

Bedeutend u, v, w die Projectionen des Weges, welchen irgend ein materieller Punkt a, b, c des mit Stoff von gleichmässiger Elasticität angefüllten Raumes zurückgelegt hat und setzt man zur Abkürzung:

$$\vartheta = \frac{du}{da} + \frac{dv}{db} + \frac{dw}{dc},$$

so lauten bekanntlich die Bewegungsgleichungen:

$$\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{\kappa d\vartheta}{da} + \lambda \Delta^2 u, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{\kappa d\vartheta}{db} + \lambda \Delta^2 v, \\ \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{\kappa d\vartheta}{dc} + \lambda \Delta^2 w, \end{aligned} \right.$$

wobei κ und λ constant sind. Haben nun die Functionen u, v, w die Eigenschaft

$$u = \frac{dF}{da}, \quad v = \frac{dF}{db}, \quad w = \frac{dF}{dc},$$

so reduciren sich obige drei Gleichungen auf die einzige Gleichung

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = (\kappa + \lambda) \Delta^2 F.$$

Dieselbe einfache Form erhalten die drei Bewegungsgleichungen, wenn $\vartheta = 0$ ist. Gelingt es daher zu zeigen, wie die drei beliebigen Functionen u, v, w in zwei Gruppen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 , zerlegt werden können, von denen die eine die Eigenschaft

$$u_1 = \frac{dF}{da}, \quad v_1 = \frac{dF}{db}, \quad w_1 = \frac{dF}{dc},$$

die andere die Eigenschaft $\vartheta_2 = 0$ besitzt, so ist die Aufgabe gelöst, das allgemeine Integral der Gleichungen β) herzustellen, welches für $t = 0$ in gegebene Functionen von a, b, c übergeht.

Setzt man, um diese Zerlegung zu finden:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

so hat man:

$$\frac{du}{da} + \frac{dv}{db} + \frac{dw}{dc} = \vartheta = \Delta^2 F.$$

Nun ist aber nach d)

$$F = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta^2 F}{r},$$

also:

$$F = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vartheta}{r},$$

und hieraus:

$$4\pi u_1 = -\frac{d}{da} \int \frac{\vartheta}{r}, \quad 4\pi v_1 = -\frac{d}{db} \int \frac{\vartheta}{r}, \quad 4\pi w_1 = -\frac{d}{dc} \int \frac{\vartheta}{r},$$

$$u_2 = u - u_1, \quad v_2 = v - v_1, \quad w_2 = w - w_1.$$

Für's Gleichgewicht hat man:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \kappa \frac{d\vartheta}{da} + \lambda \Delta^2 u, \\ 0 = \kappa \frac{d\vartheta}{db} + \lambda \Delta^2 v, \\ 0 = \kappa \frac{d\vartheta}{dc} + \lambda \Delta^2 w, \end{array} \right.$$

und mit Hülfe der Gleichung d)

$$u = \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \int \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{1}{r} dv.$$

Betrachtet man den Gleichgewichtszustand innerhalb einer geschlossenen Fläche, so kann man ausserhalb derselben ϑ ganz beliebig annehmen. Man hat daher, wenn U eine beliebige Function von der Eigenschaft $\Delta^2 U = 0$ bedeutet und die Integration sich über den von der Fläche eingeschlossenen Raum erstreckt:

$$u = \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \int \frac{d\vartheta}{dx} \frac{1}{r} + U.$$

Durch partielle Integration lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen; es ist nämlich:

$$\int \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{1}{r} \cdot dx = \frac{\vartheta}{r} - \int \vartheta \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) dx,$$

oder weil $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{d}{da} \left(\frac{1}{r} \right) = 0$ ist:

$$\int \frac{d\vartheta}{dx} \frac{1}{r} dv = \int \frac{\vartheta \cos(nx)}{r} d\sigma + \frac{d}{da} \int \frac{\vartheta}{r} dv.$$

Nun hat das erste Integral rechts innerhalb des geschlossenen Raumes die Eigenschaft $\Delta^2 = 0$; man kann daher setzen:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = U + \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \frac{d}{da} \int \frac{\vartheta}{r}, \\ v = V + \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \frac{d}{db} \int \frac{\vartheta}{r}, \\ w = W + \frac{\kappa}{4\pi\lambda} \frac{d}{dc} \int \frac{\vartheta}{r}. \end{array} \right.$$

Differenzirt man die erste Gleichung nach a , die zweite nach b und die dritte nach c , so hat man durch Addition

$$\frac{\kappa + \lambda}{\lambda} \cdot \vartheta = \frac{dU}{da} + \frac{dV}{db} + \frac{dW}{dc},$$

womit ϑ durch U, V, W ausgedrückt ist.

§ 21.

Berechnung der Potentialfunction. Einige allgemeine Sätze.

Wir wollen uns nunmehr mit der Berechnung der Potentialfunction beschäftigen und benutzen hierzu die in § 2 aufgestellten Formeln.

Liegen sämtliche Massentheilchen innerhalb einer Kugel, die man mit dem Radius r beschreibt, so ist:

$$a) \quad V = \sum \sum \sum \frac{d^{l+m+n} (r^{-1})}{d a^l d b^m d c^n} \int \frac{(-x)^l (-y)^m (-z)^n}{1 \dots l \cdot 1 \dots m \cdot 1 \dots n} dm,$$

wobei sich die Integration über die ganze Masse erstreckt und x, y, z die Coordinaten eines Massenpunktes bezeichnen. Die hier angedeuteten Differenziationen sind leicht auszuführen. Bezeichnet man die Cosinus der Richtung r durch a', b', c' , so hat man:

$$\frac{dr}{da} = a', \quad \frac{dr}{db} = b', \quad \frac{dr}{dc} = c',$$

$$\frac{d}{da} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} (-a'),$$

$$\frac{d^2}{da^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^3} (-1 + 3a'^2), \quad \frac{d^2}{da db} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^3} (3a' b'),$$

$$\frac{d^3}{da^3} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^4} (9a' - 15a'^3), \quad \frac{d^3}{da^2 db} = \frac{1}{r^4} (3b' - 15a'^2 b'),$$

$$\frac{d^3}{da db dc} = \frac{1}{r^4} (-15a' b' c'),$$

$$\frac{d^4}{da^4} = \frac{1}{r^5} (9 - 90a'^2 + 105a'^4), \quad \frac{d^4}{da^3 db} = \frac{1}{r^5} (-45a' b' + 105a'^3 b'),$$

$$\frac{d^4}{da^2 db^2} = \frac{1}{r^5} (3 - 15a'^2 - 15b'^2 + 105a'^2 b'^2),$$

$$\frac{d^4}{da^2 db dc} = \frac{1}{r^5} (-15b' c' + 105a'^2 b' c')$$

u. s. f.

Stellt man das Massensystem so, dass der Schwerpunkt zum Centrum des Coordinatensystems wird und die drei Coordinatenachsen mit den drei Hauptdrehungsachsen zusammenfallen, so ist (§ 12):

$$\sum x dm = \sum y dm = \sum z dm = 0,$$

$$\sum xy dm = \sum xz dm = \sum yz dm = 0.$$

Man hat daher:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{3a'^2 - 1}{2r^3} \sum m x^2 + \frac{3b'^2 - 1}{2r^3} \sum m y^2 + \frac{3c'^2 - 1}{2r^3} \sum m z^2 \dots$$

Ist der Körper regelmässig, so dass:

$$\sum m x^2 = \sum m y^2 = \sum m z^2,$$

wie z. B. der Würfel, das Octaeder u. s. f., so hat man:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{U_5}{r^5},$$

woraus man sieht, dass man sogar bei mässigen Entfernungen einen solchen Körper gerade so ansehen darf, als sei seine Masse im Schwerpunkt vereinigt.

Man hat überhaupt für ein beliebiges Massensystem:

$$V = \frac{U_0}{r} + \frac{U_1}{r^2} + \frac{U_2}{r^3} \dots,$$

und da die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks aus den höheren Differenzialcoefficienten von r^{-1} bestehen, so sieht man, dass jedes einzelne Glied die Bedingung erfüllt:

$$\Delta^2 \frac{U_s}{r^{s+1}} = 0.$$

Liegen dagegen sämtliche Massen ausserhalb einer Kugel, die man mit dem Radius r beschreibt, so hat man:

$$V = \sum \sum \sum \frac{(-a)^l (-b)^m (-c)^n}{1 \dots l \cdot 1 \dots m \cdot 1 \dots n} \int \frac{d^{l+m+n} (\varrho^{-1})}{dx^l dy^m dz^n} dm.$$

Da nun $a = ra'$; $b = rb'$; $c = rc'$ ist, so lässt sich auch dieses Integral in eine Reihe verwandeln von der Form:

$$V = U_0 + r U_1 + r^2 U_2 \dots,$$

und auch hier erfüllt jedes einzelne Glied die Bedingung:

$$\Delta^2 r^s U_s = 0,$$

denn das allgemeine Glied $r^s U_s$ ist von der s^{ten} Dimension, also $\Delta^2 r^s U_s$ von der $s - 2^{\text{ten}}$ Dimension. Bildet man nun

$$\Delta^2 V = 0 = \Delta^2 r^2 U_2 + \Delta^2 r^3 U_3 \dots,$$

so wird das erste Glied der Reihe von der 0^{ten} , das zweite von der 1^{ten} Dimension u. s. f. Man kann somit setzen:

$$\Delta^2 r^2 U_2 = F_0; \quad \Delta^2 r^3 U_3 = r F_1 \dots,$$

und die Summe dieser Ausdrücke kann nur gleich Null sein, wenn jeder einzelne gleich Null ist. Man sieht hieraus, dass die angegebene Eigenschaft in der That stattfindet.

Sind die wirkenden Massen über eine Kugelfläche verbreitet, deren Radius gleich R ist, so hat man für die Potentialfunction ausserhalb,

wenn man die Dichtigkeit mit s bezeichnet und zugleich die Formeln in § 2 berücksichtigt:

$$V_a = \int T s \, d\sigma = \frac{1}{r} \int T_0 s \, d\sigma + \frac{R}{r^2} \int T_1 s \, d\sigma + \frac{R^2}{r^3} \int T_2 s \, d\sigma \dots$$

Ferner hat man für die Potentialfunction im Innern der Kugel:

$$V_i = \frac{1}{R} \int T_0 s \, d\sigma + \frac{r}{R^2} \int T_1 s \, d\sigma + \frac{r^2}{R^3} \int T_2 s \, d\sigma \dots$$

Da die Integrale in beiden Reihen dieselben sind, so kann man auch sagen:

$$V_a = \frac{U_0}{r} + \frac{R}{r^2} U_1 + \frac{R^2}{r^3} U_2 \dots,$$

$$V_i = \frac{U_0}{R} + \frac{r}{R^2} U_1 + \frac{r^2}{R^3} U_2 \dots,$$

oder:

$$V_a = \frac{1}{r} \left(U_0 + \frac{R}{r} U_1 + \frac{R^2}{r^2} U_2 \dots \right),$$

$$V_i = \frac{1}{R} \left(U_0 + \frac{r}{R} U_1 + \frac{r^2}{R^2} U_2 \dots \right),$$

woraus man hat:

$$V_a = \frac{1}{r} f\left(\frac{R}{r}\right), \quad V_i = \frac{1}{R} f\left(\frac{r}{R}\right).$$

Ist daher die Potentialfunction innerhalb bekannt und gleich $f_i(r)$, so ist sie ausserhalb gleich

$$\frac{R}{r} f_i\left(\frac{R^2}{r}\right).$$

Ist sie ausserhalb bekannt und gleich $f_a(r)$, so ist sie innerhalb

$$\frac{R}{r} f_a\left(\frac{R^2}{r}\right).$$

§ 22.

Die Potentialfunction magnetischer Massen. Moment und Achse des Magneten.

Bei einem Magneten denkt man sich gleiche Massen positiven und negativen Fluidums vereinigt; seine Potentialfunction ist daher:

$$V = \frac{U_1}{r^2} + \frac{U_2}{r^3} \dots$$

Befindet sich der angegriffene Punkt in sehr grosser Entfernung, so kann man die folgenden Potenzen vernachlässigen; hat ferner dieser die Masse M , so ist das Potential des Magneten und dieses Punktes gleich

$$P = \frac{M U_1}{r^2} = - \frac{M}{r^2} (a' \sum m x + b' \sum m y + c' \sum m z).$$

Setzt man:

$$\sum m x = \alpha, \quad \sum m y = \beta, \quad \sum m z = \gamma,$$

und betrachtet man α, β, γ als Projectionen einer Linie ϱ , so hat man:

$$P = - \frac{M \varrho \cos(r \varrho)}{r^2}.$$

Nun ist $\frac{M}{r^2}$ die auf den Magneten wirkende Kraft. Ist diese constant gleich 1, so ist:

$$P = - \varrho \cos(r \varrho).$$

Dieser Ausdruck ist ein Maximum, es findet also (§ 6) stabiles Gleichgewicht statt, wenn r und ϱ in entgegengesetzter Richtung liegen. Dreht man den Magneten in der Ebene $(r \varrho)$ um $d(r \varrho)$, oder, was dasselbe ist, lässt man den Magneten fest und dreht man r um denselben Betrag, so bleibt ϱ unverändert und man hat:

$$dP = \varrho \sin(r \varrho) d(r \varrho).$$

Auf den Magneten wirkt daher eine Drehkraft, welche gleich

$$\varrho \sin(r \varrho)$$

ist und dies ist die Veranlassung, warum man den Ausdruck ϱ das magnetische Moment und die Richtung ϱ die magnetische Achse nennt.

Differenzirt man die Potentialfunction r^{-1} nach a , so erhält man $-\frac{a'}{r^2}$, d. i. die Potentialfunction eines magnetischen Elements, dessen Moment gleich 1 und dessen Achse in der Richtung der X -Achse liegt. Differenzirt man r^{-1} in einer beliebigen Richtung n , so erhält man die Potentialfunction eines magnetischen Elements, dessen Moment gleich 1 ist und dessen Achse in der Richtung n liegt. Umschliesst man ein beliebiges Massensystem durch eine Fläche, so ist nach § 20 (e) die Potentialfunction ausserhalb derselben gleich:

$$V_p = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} - \frac{1}{4\pi} \int V d\omega.$$

Nun ist $d\omega = \frac{d\sigma \cos(nr)}{r^2}$, ferner $\frac{\cos(nr)}{r^2} = -\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right)$ (vergl. § 3), der letztere Ausdruck ist aber die Potentialfunction eines magnetischen Elements von der Stärke 1 und der Richtung $-n$. Das Integral

$$\int V d\omega$$

ist also die Potentialfunction einer auf der gegebenen Oberfläche verbreiteten magnetischen Schicht, welche so beschaffen ist, dass ihre Stärke überall gleich V ist und ihre Achse allenthalben in der Richtung der Normalen liegt. Da ferner (vergl. § 17), wenn V auf der ganzen Oberfläche constant ist, obiges Integral ausserhalb der Oberfläche gleich Null und innerhalb derselben constant ist, so ergibt sich der merkwürdige Satz, dass eine auf einer beliebigen geschlossenen Oberfläche verbreitete magnetische Schicht von gleicher Stärke, die überall in der Richtung der Normale ihre Achsenrichtung hat, nirgends eine Wirkung ausübt.

§ 23.

Die Potentialfunction des homogenen Ellipsoids innerhalb desselben.

Von den homogenen Körpern ist das Ellipsoid derjenige, dessen Potentialfunction sich am leichtesten berechnen lässt. Verlegt man das Coordinatencentrum in den angegriffenen Punkt, so lautet die Gleichung des Ellipsoids:

$$p(x+a)^2 + q(y+b)^2 + r(z+c)^2 = 1,$$

und p, q, r sind die verkehrten Quadrate der Halbachsen. Im gemischten Coordinatensystem, welches einen Punkt durch den Radius ϱ und die drei Cosinus x', y', z' bezeichnet, lautet diese Gleichung nach den Potenzen von ϱ geordnet:

$$\begin{aligned} \varrho^2 (px'^2 + qy'^2 + rz'^2) + 2\varrho (apx' + bqy' + crz') \\ = 1 - (a^2 p + b^2 q + c^2 r), \end{aligned}$$

oder

$$\varrho^2 A + 2\varrho B = C.$$

Hieraus hat man:

$$\varrho = \frac{1}{A} \left(-B \pm \sqrt{B^2 + AC} \right).$$

Zur Berechnung der Potentialfunction müssen beide Radien positiv genommen werden. Liegt nun der angegriffene Punkt innerhalb des El-

lipsoids, so ist C positiv, im andern Falle negativ. Für Punkte innerhalb hat man also:

$$A \varrho_1 = \sqrt{B^2 + AC} - B,$$

$$A \varrho_2 = \sqrt{B^2 + AC} + B,$$

und für Punkte ausserhalb:

$$A \varrho_1 = B - \sqrt{B^2 + AC},$$

$$A \varrho_2 = B + \sqrt{B^2 + AC}.$$

Für Punkte innerhalb hat man also:

$$A(\varrho_1 - \varrho_2) = -2B,$$

und für Punkte ausserhalb:

$$A(\varrho_1 - \varrho_2) = -2\sqrt{B^2 + AC}.$$

Nun ist, wie man sich leicht überzeugt:

$$\frac{dV}{da} = \int \varrho x' d\omega, \quad \frac{dV}{db} = \int \varrho y' d\omega, \quad \frac{dV}{dz} = \int \varrho z' d\omega.$$

Man berechnet also die Potentialfunction am leichtesten für innerhalb gelegene Punkte aus ihren Differenzialcoefficienten. Nun bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 zwei diametral gegenüberliegende Radien, für welche $x'_2 = -x'_1$ u. s. f. ist. Man hat also, wenn man nur über die halbe Kugel- fläche integrirt, in welcher alle x' positiv sind:

$$\frac{dV}{da} = \int (\varrho_1 - \varrho_2) x' d\omega,$$

und wenn man für $\varrho_1 - \varrho_2$ seinen Werth setzt:

$$\frac{dV}{da} = -2 \int \frac{apx'^2 + bq x' y' + cr x' z'}{px'^2 + qy'^2 + rz'^2} \cdot d\omega.$$

Da nun innerhalb des Integrationsintervalles jedem $x' y'$ ein $-x' y'$ entspricht, so hat man, wenn man noch die Integration über die ganze Kugel- fläche ausdehnt:

$$\frac{dV}{da} = -a \int \frac{px'^2}{px'^2 + qy'^2 + rz'^2} \cdot d\omega = aP,$$

$$\frac{dV}{db} = -b \int \frac{qy'^2}{px'^2 + qy'^2 + rz'^2} \cdot d\omega = bQ,$$

$$\frac{dV}{dc} = -c \int \frac{rz'^2}{px'^2 + qy'^2 + rz'^2} \cdot d\omega = cR.$$

Hieraus ergibt sich, wie zu erwarten war:

$$\Delta^2 V = -4\pi.$$

Die Coefficienten P , Q , R hängen nur von dem Verhältniss der Achsen ab, aber nicht von ihrer absoluten Länge, woraus folgt, dass im Innern einer von zwei concentrischen und ähnlichen Ellipsoiden eingeschlossenen Schale die Potentialfunction dieser Schale constant ist.

Durch Integration der drei obigen Gleichungen erhält man:

$$V = \frac{1}{2} (Pa^2 + Qb^2 + Rc^2) + \text{Const.}$$

Wir wollen nunmehr die Ausdrücke P , Q , R berechnen. Im sphärischen Coordinatensystem haben wir:

$$R = r \int_0^\pi d\xi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \xi \sin \xi d\varphi}{(p \sin^2 \xi + r \cos^2 \xi) \cos^2 \varphi + (q \sin^2 \xi + r \cos^2 \xi) \sin^2 \varphi}.$$

Nun ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}$$

gleich der doppelten Fläche einer Ellipse, deren Halbachsen gleich $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{1}{\sqrt{b}}$ sind, also gleich $\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$; das Integral R reducirt sich daher nebst den beiden anderen auf:

$$P = -2\pi \int_0^\pi \frac{p \cos^2 \xi \sin \xi d\xi}{V(q \sin^2 \xi + p \cos^2 \xi) V(r \sin^2 \xi + p \cos^2 \xi)},$$

$$Q = -2\pi \int_0^\pi \frac{q \cos^2 \xi \sin \xi d\xi}{V(p \sin^2 \xi + q \cos^2 \xi) V(r \sin^2 \xi + q \cos^2 \xi)},$$

$$R = -2\pi \int_0^\pi \frac{r \cos^2 \xi \sin \xi d\xi}{V(p \sin^2 \xi + r \cos^2 \xi) V(q \sin^2 \xi + r \cos^2 \xi)}.$$

Diese Ausdrücke sind elliptische Integrale.

Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid und ist die Achse r die Rotationsachse, so hat man nach einer einfachen Transformation:

$$R = -4\pi \int_0^1 \frac{r z^2 dz}{p + (r - p) z^2}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung das Verhältniss der Excentricität zur kleinen Achse gleich μ , also

$$\mu = \sqrt{\frac{r-p}{p}},$$

so hat man nach bekannten Formeln:

$$R = -\frac{4\pi(1+\mu^2)}{\mu^3}(\mu - \operatorname{arctg} \mu),$$

$$P = Q = -\frac{4\pi}{\mu^3} \left[\frac{(1+\mu^2)}{2} \operatorname{arctg} \mu - \frac{\mu}{2} \right].$$

Diese gelten jedoch nur, wenn $r-p$ positiv, also die Rotationsachse die kleinste Achse ist. Ist diese die grösste Achse, so haben wir, wenn

wir $v = \sqrt{\frac{p-r}{p}}$ setzen:

$$R = -\frac{4\pi(1-v^2)}{v^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+v}{1-v} - v \right),$$

$$P = Q = -\frac{4\pi}{v^3} \left(\frac{v}{2} - \frac{1-v^2}{4} \log \frac{1+v}{1-v} \right).$$

Den letzten Ausdruck kann man aus R durch die Formel

$$P + Q + R = -4\pi$$

ableiten.

Sind p, q, r wenig von einander verschieden, so lassen sich auch die Ausdrücke P, Q, R sehr leicht mit Hülfe der Formeln in § 2 in convergente Reihen verwandeln. Man hat nämlich:

$$P = - \int \frac{x'^2 d\omega}{1 + \frac{q-p}{p} y'^2 + \frac{r-p}{p} z'^2},$$

man kann dann ohne Weiteres hinschreiben:

$$P = \frac{4\pi}{3} \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{1}{5}(\mu^2 + \mu'^2) + \frac{1}{5 \cdot 7}(1 \cdot 3 \mu^4 + 2 \mu^2 \mu'^2 + 1 \cdot 3 \mu'^4) \\ &- \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9}(1 \cdot 3 \cdot 5 \mu^6 + 3 \cdot 1 \cdot 3 \mu^4 \mu'^2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 \mu^2 \mu'^4 \\ &+ 1 \cdot 3 \cdot 5 \mu'^6) \dots \end{aligned} \right\},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{q-p}{p} = \mu^2, \quad \frac{r-p}{p} = \mu'^2.$$

§ 24.

Ausserhalb desselben. Die Potentialfunction des Ellipsoids ausserhalb desselben hängt nur von der Masse und den geometrischen Excentricitäten ab.

Zur Bestimmung der Potentialfunction ausserhalb eines Ellipsoids ist die soeben angewendete Methode nicht ausführbar, da der Ausdruck für $\varrho_1 - \varrho_2$ viel verwickelter wird und die Integration sich nicht mehr über eine Kugelfläche erstreckt, sondern über den Raum des Horizonts, welchen das vom angegriffenen Punkt aus gesehene Ellipsoid verdeckt. Wir wenden daher die Formel § 21 a) an und haben zunächst die Aufgabe zu lösen, das Integral

$$\int x^l y^m z^n$$

für den Raum des Ellipsoids zu berechnen. Ist irgend eine der drei Potenzen ungerade, so wird auch das ganze Integral offenbar gleich Null, weil alsdann jedem positiven Werth innerhalb des Integrationsintervalles ein gleicher negativer entspricht. Verwandeln wir das Ellipsoid in eine Kugel vom Radius 1, so müssen wir das Raumdifferenzial mit p, q, r und die Coordinaten x, y, z mit p, q, r multipliciren, um das obige Integral zu erhalten, wenn die drei Halbachsen p, q, r sind. Das obige Integral wird daher in die Grenzen der Kugel reducirt:

$$\frac{3M}{4\pi} p^l q^m r^n \int x^l y^m z^n.$$

Das hier vorkommende Integral ist nun nach § 2 leicht zu berechnen, so dass man für's Ellipsoid mit den Achsen p, q, r hat:

$$\int x^{2l} y^{2m} z^{2n} = 3M p^{2l} q^{2m} r^{2n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2q-1) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2r-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots [2(l+m+n)+3]}.$$

Substituirt man dieses Ergebniss in § 21 a), so hat man:

$$V = 3M \sum \sum \sum \frac{d^{2(l+m+n)} (r^{-1})}{da^{2l} db^{2m} dc^{2n}} \times \frac{p^{2l} q^{2m} r^{2n}}{2^{l+m+n} \cdot 1 \dots l \cdot 1 \dots m \cdot 1 \dots n \cdot 1 \cdot 3 \dots [2(l+m+n)+3]}.$$

Fasst man nun alle Glieder von der Dimension $2s$ zusammen, für welche also $l+m+n=s$ ist, so hat man:

$$\frac{1}{2^s 1 \cdot 3 \dots (2s+3)} \sum \sum \frac{d^{2s} (r^{-1})}{da^{2l} db^{2m} dc^{2n}} \cdot \frac{p^{2l} q^{2m} r^{2n}}{1 \dots l \cdot 1 \dots m \cdot 1 \dots n},$$

und dieses Glied lässt sich auch in die elegantere Form bringen:

$$\frac{1}{1.2.3 \dots (2s+1)(2s+3)} \sum \sum \frac{d^{2s}(r^{-1})}{da^{2l} db^{2m} dc^{2n}} \frac{1 \dots s}{1..l.1..m.1..n} p^{2l} q^{2m} r^{2n}.$$

Nun ist:

$$\sum \sum \frac{1 \dots s}{1..l.1..m.1..n} p^{2l} q^{2m} r^{2n} = (p^2 + q^2 + r^2)^s.$$

Man sieht daher leicht, dass die ganze Doppelsumme der Form nach gleich

$$\left(\frac{d^2}{da^2} \cdot p^2 + \frac{d^2}{db^2} \cdot q^2 + \frac{d^2}{dc^2} \cdot r^2 \right)^s$$

gesetzt werden kann, mit anderen Worten, dass man diese Doppelsumme erhält, wenn man das Trinom entwickelt, jedoch nach durchgeführter Entwicklung die Ausdrücke

$$\frac{d^{2s}}{da^{2l} db^{2m} dc^{2n}}$$

nicht als Producte, sondern als Differenzialcoefficienten von r^{-1} betrachtet. Das Trinom lässt sich aber auch in der Form

$$\left[\frac{d^2}{da^2} (p^2 - r^2) + \frac{d^2}{db^2} (q^2 - r^2) + r^2 \Delta^2 \right]^s$$

entwickeln, d. h. man erhält formell das gleiche Resultat, ob man den letztern oder den erstern Ausdruck entwickelt. Da nun $\Delta^2 = 0$ ist, so hat man schliesslich, wenn man noch die Quadrate der Excentricitäten $p^2 - r^2$ und $q^2 - r^2$ durch ε_1^2 und ε_2^2 bezeichnet:

$$a) \quad V = 3M \sum \frac{1}{1.2 \dots (2s+1)(2s+3)} \left(\frac{d^2}{da^2} \varepsilon_1^2 + \frac{d^2}{db^2} \varepsilon_2^2 \right)^s,$$

welche Summe von $s=0$ bis ins Unendliche zu nehmen ist. Wenn man die Reihe entwickelt, erhält man:

$$V = M \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \\ & + \frac{1}{2.5} \left[\varepsilon_1^2 \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \varepsilon_2^2 \frac{d^2}{db^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2.4.5.7} \left[\varepsilon_1^4 \frac{d^4}{da^4} \left(\frac{1}{r} \right) + 2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \frac{d^4}{da^2 db^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right. \\ & \left. + \varepsilon_2^4 \frac{d^4}{db^4} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \dots \end{aligned} \right\}.$$

Für's Rotationsellipsoid hat man, da

$$\frac{d^2}{da^2} + \frac{d^2}{db^2} = - \frac{d^2}{dc^2}$$

ist, die einfachere Formel:

$$V = 3M \sum \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2s+1)(2s+3)} \frac{d^{2s}}{dc^{2s}} \left(\frac{1}{r} \right) (-\varepsilon^2)^s.$$

Aus Formel a) sieht man, dass die Potentialfunction eines Ellipsoids ausserhalb desselben nur von der Masse und den beiden Excentricitäten der durch die kleinste Achse geführten Hauptschnitte abhängt, und auf diesen Satz lässt sich zugleich eine andere Methode gründen, die Potentialfunction ausserhalb des Ellipsoids zu finden. Man construirt nämlich ein Ellipsoid, welches mit dem gegebenen gleiche Masse und gleiche geometrische Excentricitäten hat und in dessen Oberfläche der gegebene Punkt liegt. Alsdann kann man mit den für das Innere des Ellipsoids im vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln die gesuchte Potentialfunction finden.

Der Beweis des soeben gefundenen Satzes

$$V = M f(a, b, c, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

beruht auf der Voraussetzung, dass der Punkt a, b, c ausserhalb einer Kugelfläche liege, welche mit der grössten Halbachse als Radius beschrieben ist. Es ist aber einleuchtend, dass er allgemein bis zur Oberfläche gelten muss. Denn da ausserhalb der wirkenden Massen die Differenzialcoefficienten der Potentialfunction keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, so kann man den Taylor'schen Satz bis zur Oberfläche anwenden. Ist die Reihe für V also convergent bis zur Oberfläche, so gilt sie auch bis zur Oberfläche. Ist sie aber nicht convergent bis zur Oberfläche, sondern existirt ausserhalb der Oberfläche noch eine Fläche, welche die Grenze der Convergenz andeutet, so kann man für irgend einen Punkt in dieser Oberfläche die Differenzialcoefficienten nach a, b, c auswärts rechnen. Ist z. B. a_1, b_1, c_1 ein beliebiger Punkt in der so definirten Oberfläche, so kann man rechnen:

$$\frac{dV}{da}(a_1, b_1, c_1) = \frac{M}{da} [f(a_1 + da, b_1, c_1) - f(a_1, b_1, c_1)]$$

u. s. f.,

weil der Voraussetzung nach die Reihe für V für $a_1 + da, b_1, c_1$ Gültigkeit hat. Wendet man nun den Taylor'schen Satz an, so hat man für einen näher an der Oberfläche gelegenen Punkt:

$$\frac{V}{M} = \frac{V_1}{M} - (a_1 - a) A - (b_1 - b) B - (c_1 - c) C \dots,$$

wobei die Ausdrücke A, B, C nur Functionen von ε_1 und ε_2 sind. Wäre man auch jetzt noch nicht an der Oberfläche angelangt, so könnte man das Verfahren wiederholen und so lange fortsetzen, bis man die Oberfläche erreicht haben würde, da man mit dem Taylor'schen Satz immer einen, wenn auch noch so kleinen Schritt vorwärts machen kann. Man sieht also, dass die angegebene Eigenschaft

$$V = M f(a, b, c, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

allgemeine Gültigkeit hat.

§ 25.

Die Kugelfunctionen. Allgemeine Sätze über dieselben.

Aus den Formeln des § 21 für die Potentialfunctionen von Massen, die auf einer Kugeloberfläche vertheilt sind, sieht man, dass dasselbe U_s , welches der Gleichung $\Delta^2 r^{-(s+1)} U_s = 0$ Genüge leistet, auch die Gleichung $\Delta^2 r^s U_s = 0$ erfüllt. Man sieht dies auch leicht aus der Transformation von $\Delta^2 u$ ins sphärische Coordinatensystem, welche in § 19 durchgeführt wurde. Denn setzt man $u = r^s U$, so erhält man

$$0 = \Delta^2 u = s(s+1) U + F(U),$$

und wenn diese Gleichung für ein bestimmtes s erfüllt wird, wird sie auch für $-(s+1)$ erfüllt.

Eine Function U_s , welche die Bedingung $\Delta^2 r^s U_s = \Delta^2 r^{-(s+1)} U_s = 0$ erfüllt, nennt man eine Kugelfunction der s^{ten} Ordnung. Ist $\Delta^2 V$ überall im unendlichen Raume gleich Null und wird V in unendlicher Entfernung gleich Null, so ist auch V überall gleich Null. Denn alsdann ist V der stationäre Temperaturzustand des unendlichen Raumes, in welchem sich nirgends eine Wärmequelle befindet. Hat man daher eine Function, welche in unendlicher Entfernung gleich Null wird und die Bedingung $\Delta^2 V = 0$ erfüllt, ohne selbst gleich Null zu sein, so kann sie dies nur dann thun, wenn irgendwo im Raum eine Wärmequelle sich befindet. Eine solche Function ist z. B. $r^{-(s+1)} U_s$, wenn U_s eine Kugelfunction der s^{ten} Ordnung bedeutet. Für sie ist überall $\Delta^2 = 0$, ausgenommen im Centrum selbst. Man kann sie daher als die Potentialfunction einer im Centrum befindlichen Masse ansehen. Hat man z. B. zwei Punkte, m und $-m$, welche in der Entfernung ϱ vom Centrum in Richtungen liegen, welche durch

die Cosinus x', y', z' und x'', y'', z'' angegeben sind, so hat man für die beiden Punkte:

$$m T = \frac{m}{r} + \frac{m \varrho T_1}{r^2} + \frac{m \varrho^2 T_2}{r^3} \dots$$

$$-m T = -\frac{m}{r} - \frac{m \varrho T_1}{r^2} - \frac{m \varrho^2 T_2}{r^3} \dots$$

Setzt man nun $m = \frac{1}{\varrho}$ und lässt ϱ gleich Null werden, so hat man:

$$V = \frac{a' (x' - x'') + b' (y' - y'') + c' (z' - z'')}{r^2},$$

indem alle übrigen Punkte verschwinden. Hat man ein System von positiven Punkten, welche so gruppirt sind, dass ihre Hauptdrehungsmomente gleich sind und addirt man dazu ein an Masse gleiches, aber negatives System von derselben Eigenschaft, setzt man ferner die Massen gleich $\frac{1}{\varrho^2}$, so hat man eine Potentialfunction, welche bloß r^{-3} enthält.

Da man nun in dieser Weise jeden Ausdruck $r^{-(s+1)} U_s$ als die Potentialfunction von im Centrum befindlichen Massen ansehen kann, so folgt daraus, dass man durch Differenziation von r^{-1} alle möglichen Kugelfunctionen erhält und somit der allgemeinste Ausdruck einer Kugelfunction vom s^{ten} Grade ist:

$$U_s = \sum \sum \frac{r^{s+1} d^{l+m+n} (r^{-1})}{d a^l d b^m d c^n} \cdot C_{l, m, n},$$

$$l + m + n = s.$$

1. Sind Massen auf einer Kugelfläche verbreitet, so hat man

$$V = \frac{U_0}{R} + \frac{U_1}{R_2} \dots$$

auf dieser Oberfläche und diese Reihe convergirt immer. Man kann sich aber auch die Sache umgekehrt denken, nämlich die Function V auf einer Kugelfläche als gegeben ansehen. Da es nun immer eine Massen-anordnung auf der Kugelfläche geben muss, welche der gegebenen Function entspricht (es wird dies zweifellos, wenn man die gegebene Function als Temperatur und die Massen als Wärmequellen betrachtet, vergl. § 15), so ist klar, dass sich jede Function in eine convergente Reihe von Kugelfunctionen auflösen lässt.

2. Ist eine Function V auf einer Kugelfläche gegeben, so ist sie ausserhalb derselben gleich

$$V_r = \frac{R V_0}{r} + \frac{R^2 V_1}{r^2} \dots,$$

wenn ausserhalb keine anderen Massen wirken. Wirken innerhalb keine Massen, so ist sie innerhalb derselben:

$$V_r = V_0 + \frac{r V_1}{R} + \frac{r^2 V_2}{R^2} \dots$$

(vergl. § 21). Hieraus sieht man auch, dass sich eine Function nur auf eine einzige Art in Kugelfunctionen auflösen lässt. Denn wären verschiedene Arten möglich, so müsste auch ein und dieselbe Masse verschiedene Potentialfunctionen haben können.

3. Die Anwendung des Satzes § 15 Nr. 6 giebt, wenn man über eine die Massen umschliessende Kugelfläche vom Radius R integrirt:

$$4\pi M = \int V_0 d\omega + \frac{2}{R} \int V_1 d\omega \dots + \frac{n+1}{R^n} \int V_n d\omega \dots$$

Hieraus hat man, da R ganz willkürlich ist:

$$V_0 = M, \quad \int V_n d\omega = 0.$$

So kann man z. B. setzen $V_4 = 105 a'^4 - 90 a'^2 + 9$ (§ 21 im Anfang), und wenn man mit Hülfe der Formel in § 2 integrirt, so findet man, dass diese Eigenschaft in der That stattfindet.

4. Aus 2) erhält man mit Anwendung des Satzes § 15 Nr. 9 für die Dichte des auf einer Kugelfläche verbreiteten Stoffes, dessen Potentialfunction gleich V ist:

$$s = \frac{1}{4\pi R} (V_0 + 3 V_1 + 5 V_2 \dots).$$

Ist die Potentialfunction der auf dieser Kugelfläche verbreiteten Masse gleich V_n , so ist sie innerhalb gleich $\frac{r^n V_n}{R^n}$; da nun die Dichte gleich

$\frac{2n+1}{4\pi R} V_n$ ist, so muss auch sein:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int V_n \sum \frac{r^m}{R^m} T_m d\omega = \frac{r^n V_n}{R^n}.$$

Da nun r ganz beliebig ist, so verschwinden aus der Summe unter dem Integralzeichen alle Glieder mit Ausnahme des Gliedes mit dem Exponenten n ; wir haben also:

wenn n und m ungleich sind:

$$\int V_n T_m d\omega = 0,$$

und wenn $n = m$ ist:

$$V_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int V_n T_n d\omega.$$

Da nun jede beliebige Function sich in eine convergente Reihe von Kugelfunctionen auflösen lässt, so hat man aus den beiden letzten Gleichungen:

$$V_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int V T_n d\omega.$$

Nun ist T_n eine Function der festen Coordinaten a', b', c' und der beweglichen Coordinaten x', y', z' . V und V_n sind Functionen der festen Coordinaten a', b', c' . Insofern sie aber unter dem Integralzeichen erscheinen, müssen sie als Functionen der veränderlichen Coordinaten angesehen werden. So können wir z. B. setzen: $V_2 = 3a'^2 - 1$. Ferner haben wir nach § 2:

$$T_2 = \frac{3}{2} (a' x' + b' y' + c' z')^2 - \frac{1}{2}.$$

Wir haben also:

$$3a'^2 - 1 = \frac{5}{4\pi} \int \left[\frac{3}{2} (a' x' + b' y' + c' z')^2 - \frac{1}{2} \right] [3x'^2 - 1] d\omega,$$

wie wir in der That finden, wenn wir die Integrationen auf die x', y', z' beziehen.

5. Der Satz 3 ist nur ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes, welcher heisst:

$$\int V_n U_m d\omega = 0.$$

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht durch folgende Betrachtung. Denkt man sich unter V_n und U_m die Potentialfunctionen zweier Massensysteme, welche über die Kugelfläche vom Radius 1 verbreitet sind, so ist die Dichtigkeit der beiden Massensysteme

$$\frac{2n+1}{4\pi} V_n \text{ und } \frac{2m+1}{4\pi} U_m.$$

Nun giebt die Anwendung des Satzes in § 8:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int V_n U_m d\omega = \frac{2m+1}{4\pi} \int U_m V_n d\omega,$$

welche Gleichung nur dann stattfinden kann, wenn $n = m$ oder

$$\int V_n U_m d\omega = 0.$$

§ 26.

Darstellung der Kugelfunctionen durch die Potenzen der Richtungs- cosinus und Auflösung der Potenzen der Richtungs- cosinus in Kugelfunctionen.

Ist eine Function durch Potenzen der Cosinus $a' b' c'$ gegeben, so hat ihre Auflösung in Kugelfunctionen keine Schwierigkeit; denn aus § 21 sieht man, dass die Kugelfunctionen, abgesehen von den beliebigen Coefficienten, heissen:

1. Ordnung: a', b', c' ;
2. „ $a'^2 - \frac{1}{3}; b'^2 - \frac{1}{3}; c'^2 - \frac{1}{3}; a' b'; a' c'; b' c';$
3. „ $a'^3 - \frac{3}{5} a' \text{ u. s. f.};$
 $a'^2 b' - \frac{1}{5} b' \text{ u. s. f.}$

Hiernach hat man z. B. bei Auflösung des Gliedes $a'^2 b'$ in Kugelfunctionen:

$$a'^2 b' = (a'^2 b' - \frac{1}{5} b') + \frac{1}{5} b' = (a'^2 b')_3 + (a'^2 b')_1.$$

Noch einfacher wird das Problem, wenn die in Betracht gezogenen Körper Rotationskörper sind. Denn alsdann lässt sich die in Kugelfunctionen aufzulösende Function darstellen durch die Reihe:

$$V = A + B c' + C c'^2 \dots$$

Nun sind die Coefficienten T_n , wenn man für die darin enthaltenen Cosinus x', y', z' constante Werthe setzt, Kugelfunctionen von a', b', c' . Setzt man nun $x' = y' = 0$, somit $z' = 1$, so erhält man die Kugelfunctionen, welche c' allein enthalten. Giebt man diesen Functionen solche Constanten, dass das erste Glied den Coefficienten 1 hat, und bezeichnet man ferner diese Kugelfunctionen einfach mit K_s , so hat man aus § 2:

$$a) \quad K_s = c'^s - \frac{s(s-1)}{2 \cdot (2s-1)} c'^{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)} c'^{s-4} \dots,$$

wie man findet, wenn man T_n mit dem Coefficienten des ersten Gliedes dividirt und c' statt $\cos$ setzt. Man hat somit:

$$K_0 = 1,$$

$$K_1 = c',$$

$$K_2 = c'^2 - \frac{1}{3},$$

$$K_3 = c'^3 - \frac{3}{5} c',$$

$$K_4 = c'^4 - \frac{6}{7} c'^2 + \frac{3}{35},$$

$$K_5 = c'^5 - \frac{10}{9} c'^3 + \frac{5}{21} c',$$

$$K_6 = c'^6 - \frac{15}{11} c'^4 + \frac{5}{11} c'^2 - \frac{5}{231}$$

$$\dots$$

Um umgekehrt irgend eine Potenz von c' in Kugelfunctionen aufzulösen, setze man:

$$c'^s = K_s + A K_{s-2} + B K_{s-4} \dots$$

Substituirt man nun für die Kugelfunctionen den Ausdruck a), so kann man die Coefficienten $A, B \dots$ bestimmen und erhält:

$$b) \quad c'^s = K_s + \frac{s(s-1)}{2 \cdot (2s-1)} K_{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2s-3)(2s-5)} K_{s-4} \dots$$

Bezeichnet man ganz allgemein die Kugelfunctionen, welche man durch Differenziation von r^{-1} erhält, durch

$$K a^p b^q c^r \text{ oder } K_{p, q, r},$$

so dass z. B. K_a^2 die Kugelfunction $a'^2 - \frac{1}{3}$ u. s. f. bedeutet, so lassen sich diese Kugelfunctionen leicht allgemein ausdrücken. Die Kugelfunction K_{pqr} ist nämlich der Coefficient von $x^p y^q z^r$, welcher in der Entwicklung von T auftritt, multiplicirt mit $r^{p+q+r+1}$. Setzt man $p+q+r=s$, so ist dieser Coefficient im Ausdruck $T_s \varrho^s$ enthalten. Nun ist abgesehen von einem constanten Coefficienten:

$$T_s = \cos^s - \frac{s(s-1)}{2 \cdot (2s-1)} \cos^{s-2} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2s-3)(2s-5)} \cos^{s-4} - \dots$$

Ferner ist $\cos = a'x' + b'y' + c'z'$; also:

$$T_s \varrho^s = (a'x + b'y + c'z)^s - \frac{s(s-1)}{2 \cdot (2s-1)} (a'x + b'y + c'z)^{s-2} \varrho^2 + \dots$$

und da

$$(a'x + b'y + c'z)^s = 1 \cdot 2 \dots s \sum \frac{(a'x)^\alpha (b'y)^\beta (c'z)^\gamma}{1 \dots \alpha 1 \dots \beta 1 \dots \gamma}$$

ist, so hat man, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $1 \cdot 2 \dots s = s!$ weglässt und alle diejenigen Glieder herausucht, welche mit $x^p y^q z^r$ multiplicirt sind:

$$\frac{a'^p b'^q c'^r}{p! q! r!} - \frac{1}{2 \cdot (2s-1)} \left[\frac{a'^{p-2} b'^q c'^r}{(p-2)! q! r!} + \frac{a'^p b'^{q-2} c'^r}{p! (q-2)! r!} + \frac{a'^p b'^q c'^{r-2}}{p! q! (r-2)!} \right] \\ + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)} \left[\frac{a'^{p-4} b'^q c'^r}{(p-4)! q! r!} + \frac{2 a'^{p-2} b'^{q-2} c'^r}{(p-2)! (q-2)! r!} \dots \right] \\ \dots \dots \dots$$

Multiplicirt man nun Alles mit dem Nenner des ersten Gliedes und behandelt $a'^p b'^q c'^r$ als gemeinschaftlichen Factor, so erhält man das leicht zu überschauende Resultat:

$$a' b'^q c'^r \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot (2s-1)} \left[\frac{p(p-1)}{a'^2} + \frac{q(q-1)}{b'^2} + \frac{r(r-1)}{c'^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)} \left[\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{a'^4} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2p(p-1)q(q-1)}{a'^2 b'^2} \dots \right] \right. \\ \dots \dots \dots$$

Bezeichnet man noch das Product $p(p-1)$ einfach durch $\bar{p}^2$ und so fort, so hat man schliesslich die elegante Bezeichnung:

$$K_{p, q, r} \\ c) = a'^p b'^q c'^r \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot (2s-1)} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right)^2 \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\}.$$

So hat man z. B.

$$K_{4, 2, 0} \\ = a'^4 b'^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cdot 11} \left(\frac{4 \cdot 3}{a'^2} + \frac{2 \cdot 1}{b'^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 9} \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{a'^4} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{a'^2 b'^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{a'^4 b'^2} \right\} \\ = a'^4 b'^2 - \frac{6}{11} a'^2 b'^2 - \frac{1}{11} a'^4 + \frac{1}{33} b'^2 + \frac{2}{33} a'^2 - \frac{1}{231}.$$

Das umgekehrte Problem, ein beliebiges Product von Potenzen der Cosinus in Kugelfunctionen aufzulösen, hat nun keine weitere Schwierig-

rigkeit, denn es ist offenbar, dass $a'^p b'^q c'^r$ in Kugelfunctionen aufgelöst, die Form erhalten muss:

$$K_{pqr} + \alpha K_{p-2qr} + \beta K_{pq-2r} + \gamma K_{pqr-2} \dots$$

Bezeichnet man

$$K a'^{p-2} b'^q c'^r \text{ durch } \frac{1}{a'^2} K a'^p b'^q c'^r \text{ u. s. f.,}$$

so hat man der Form nach:

$$\begin{aligned} & a'^p b'^q c'^r \\ &= K a'^p b'^q c'^r \left[1 + A \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) + B \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right)^2 \dots \right] \end{aligned}$$

Nun ist:

$$K a'^p b'^q c'^r = a'^p b'^q c'^r \left[1 - \frac{1}{2 \cdot (2s-1)} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) + \dots \right],$$

also:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{p}^2}{a'^2} K a'^p b'^q c'^r \\ &= a'^p b'^q c'^r \left[\frac{\bar{p}^2}{a'^2} - \frac{1}{2 \cdot (2s-5)} \frac{\bar{p}^2}{a'^2} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) \dots \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) K a'^p b'^q c'^r \\ &= a'^p b'^q c'^r \left[\left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) \frac{-1}{2 \cdot (2s-5)} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right)^2 \dots \right] \end{aligned}$$

Substituirt man die so gefundenen Werthe in die obige Gleichung für $a'^p b'^q c'^r$, so findet man:

$$a'^p b'^q c'^r = a'^p b'^q c'^r \left[1 + \left(A - \frac{1}{2 \cdot (2s-1)} \right) \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) + \dots \right]$$

Man überzeugt sich leicht, dass die zu bestimmenden Coefficienten $A, B \dots$ dieselben sind, wie in b), so dass man schliesslich hat:

$$\begin{aligned} & \text{d)} \quad a'^p b'^q c'^r \\ &= K a'^p b'^q c'^r \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2 \cdot (2s-1)} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right) \\ & + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2s-3) (2s-5)} \left(\frac{\bar{p}^2}{a'^2} + \frac{\bar{q}^2}{b'^2} + \frac{\bar{r}^2}{c'^2} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

So findet man z. B.

$$a'^4 b'^2 = K_{420} + \frac{6}{11} K_{220} + \frac{1}{11} K_{400} + \frac{1}{21} K_{020} + \frac{2}{21} K_{200} + \frac{1}{35}.$$

Ferner überzeugt man sich leicht, dass man hat:

$$\frac{d}{da} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{K_a}{r^2}; \quad \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 1 \cdot 3 \frac{K_a^2}{r^3} \dots$$

überhaupt:

$$e) \quad \frac{d^s}{da^p db^q dc^r} \left(\frac{1}{r} \right) = (-1)^s \cdot 1 \cdot 3 \dots (2s-1) \cdot \frac{K_{q,q,r}}{r^{s+1}}.$$

Es ist also:

$$T = \frac{1}{r} - \frac{\varrho}{r^2} (x' K_a + y' K_b + z' K_c) + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{\varrho^2}{r^3} (x'^2 K_{a^2} + 2x'y' K_{ab} \dots)$$

oder da man in den Ausdrücken T_s die Werthe a' und x' u. s. f. vertauschen darf:

$$T = \frac{1}{r} - \frac{\varrho}{r^2} (a' K_x + b' K_y + c' K_z) \dots$$

Löst man die Ausdrücke $a', b', c'; a'^2, b'^2, a'b'$ u. s. f. in Kugelfunctionen auf, so müssen wegen der Gleichheit der beiden letzten Gleichungen alle Kugelfunctionen, welche von einer niederen Ordnung sind, als die Potenz von ϱ , verschwinden, so dass man hat:

$$T_1 = -(K_x K_a + K_y K_b + K_z K_c),$$

$$T_2 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} (K_{x^2} K_{a^2} + K_{y^2} K_{b^2} + 2K_{xy} K_{ab} \dots),$$

und T_s in die sehr elegante und leicht zu interpretirende Form bringen kann:

$$f) \quad T_s = (-1)^s \frac{1 \cdot 3 \dots 2s-1}{1 \cdot 2 \dots s} (K_x K_a + K_y K_b + K_z K_c)^s.$$

§ 27.

Die Kugelfunctionen durch Länge und Breite ausgedrückt.

Wie wir aus dem Bisherigen gesehen haben, erhält man alle Kugelfunctionen, wenn man r^{-1} nach $a b c$ fortgesetzt differenzirt. Die so erhaltenen Ausdrücke sind aber nicht geeignet, um aus ihnen die allgemeinste Form der Kugelfunctionen abzuleiten. Denn es ist klar, dass

man auf diese Weise viele Kugelfunctionen doppelt erhält, weil von den drei Argumenten $a' b' c'$ nur zwei willkürlich sind. So ist z. B. $c'^2 - \frac{1}{3}$ schon in $a'^2 - \frac{1}{3}$ und $b'^2 - \frac{1}{3}$ enthalten, wie man durch Addition der letzten beiden Ausdrücke findet.

Betrachtet man irgend eine Function, die sich über eine Kugeloberfläche verbreitet, so sieht man, dass sie sich durch $f(a', b')$ darstellen lässt; aber nur wenn sie in Bezug auf den Aequator symmetrisch ist. Ist sie in Bezug auf den Aequator negativ symmetrisch, so genügt die Form $c' f(a', b')$, um sie darzustellen. Man sieht hieraus, dass sich jede Function, welche für die verschiedenen Punkte einer Kugeloberfläche verschiedene Werthe geben soll, durch die allgemeine Form

$$f(a', b') + c' \varphi(a', b')$$

darstellen lässt, aber auch nicht durch eine einfachere Form dargestellt werden kann. Alle Kugelfunctionen der s^{ten} Ordnung sind daher in den beiden Formen

$$r^{s+1} \frac{d^s (r^{-1})}{da' db^{s-l}} \text{ und } r^{s+1} \frac{d^s (r^{-1})}{dc da' db^{s-l-1}}$$

enthalten, und es ergibt sich hieraus, dass es überhaupt $2s + 1$ Kugelfunctionen des s^{ten} Grades giebt. Dies ergibt sich auch durch folgende Betrachtung: Da $\Delta^2 (r^{-1}) = 0$ ist, so hat man:

$$K_{pqr} = - (K_{p+2, q, r-2} + K_{p, q+2, r-2}) \text{ u. s. f.}$$

Man sieht also, dass man c' aus jeder Kugelfunction entweder ganz oder bis zur ersten Potenz eliminiren kann. Hiernach sind z. B. die fünf Kugelfunctionen des zweiten Grades:

$$a'^2 - \frac{1}{3}, \quad b'^2 - \frac{1}{3}, \quad a' b'; \quad c' a'; \quad c' b'$$

oder in sphärischen Coordinaten ausgedrückt:

$$\sin^2 \zeta \cos^2 \varphi - \frac{1}{3}; \quad \sin^2 \zeta \sin^2 \varphi - \frac{1}{3}; \quad \sin^2 \zeta \sin \varphi \cos \varphi; \quad \sin \zeta \cos \zeta \sin \varphi; \\ \sin \zeta \cos \zeta \cos \varphi.$$

Will man die Kugelfunctionen in allgemeiner Form durch dieses Coordinatensystem ausdrücken, so bedient man sich am besten der Differentialgleichung in § 19. Diese giebt nämlich:

$$s(s+1) U_s + \frac{d^2 U_s}{d\zeta^2} + \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta} \frac{d U_s}{d\zeta} + \frac{d^2 U_s}{\sin^2 \zeta d\varphi^2} = 0.$$

Der Cosinus zweier Linien, welcher im gemischten Coordinatensystem gleich $a' x' + b' y' + c' z'$ ist, wird im sphärischen Coordinatensystem, wenn die Richtungen der beiden Linien φ, ζ und φ', ζ' sind:

$$\sin \zeta \sin \zeta' \cos (\varphi - \varphi') + \cos \zeta \cos \zeta'.$$

Sieht man ζ' und φ' als Constante an, so erhält man alle möglichen Kugelfunctionen, wenn man in den Ausdrücken für T_s diesen Ausdruck substituirt. Das allgemeine Glied von T_s hat die Form $\cos^{s-2m}$. Wenn man nun den Ausdruck für $\cos$ in die $s-2m^{\text{te}}$ Potenz erhebt, erhält man Glieder von der Form:

$$(\sin \zeta \sin \zeta')^p (\cos \zeta \cos \zeta')^{s-2m-p} \cos^p (\varphi - \varphi').$$

Löst man ferner $\cos^p (\varphi - \varphi')$ in eine nach dem Vielfachen von $\varphi - \varphi'$ fortschreitende Reihe auf, so erhält man Glieder von der Form:

$$\sin^p \zeta \cos^{s-2m-p} \zeta \cos (p - 2r) (\varphi - \varphi')$$

oder von der Form:

$$\sin \zeta^{q+2r} (\cos \zeta)^{s-2m-q-2r} \cdot \cos q (\varphi - \varphi')$$

oder auch:

$$(\cos \text{ oder } \sin) (q \varphi) \sin^q \zeta f(\cos \zeta).$$

Setzt man nun $U_s = (\cos \text{ oder } \sin) (q \varphi) F(\zeta)$, so wird unsere Differentialgleichung zu

$$\sin^2 \zeta \left[s(s+1) F + \frac{d^2 F}{d\zeta^2} \right] + \sin \zeta \cos \zeta \frac{dF}{d\zeta} - q^2 F = 0.$$

Setzt man noch schliesslich $F = \sin^q \zeta f(\cos \zeta)$, so hat man:

$$a) [s(s+1) - q(q+1)] f - 2(q+1) \cos \zeta f' - \cos^2 \zeta f'' + f'' = 0.$$

Nun hat $f(\cos \zeta)$ die Form:

$$\sum A_n (\cos \zeta)^{s-q-2n}$$

und durch die Methode der unbestimmten Coefficienten hat man:

$$A_n = - \frac{(s-q-2n+2)(s-q-2n+1)}{2n(2s-2n+1)} A_{n-1}.$$

Die Gleichung a) wird erfüllt durch $f = \text{Const.}$, $q = s$; dies giebt die Kugelfunction:

$$\cos \text{ oder } \sin (s \varphi) \sin^s \zeta.$$

Ferner durch $f = \cos \zeta$; $q = s - 1$; dies giebt:

$$\cos \text{ oder } \sin (s-1) \varphi \sin^{s-1} \zeta \cos \zeta.$$

Die nächste Kugelfunction ist:

$$\cos \text{ oder } \sin (s-2) \varphi \left[\cos^2 \zeta - \frac{1}{2s-1} \right] \sin^{s-2} \zeta.$$

Die letzte ist, wie wir bereits früher gefunden haben:

$$\cos^s \zeta - \frac{s(s-1)}{2 \cdot (2s-1)} \cos^{s-2} \zeta + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)} \cos^{s-4} \zeta \dots$$

Wir haben also $2s+1$ Kugelfunctionen des s^{ten} Grades, welche lauten:

$$b) \left\{ \begin{array}{ll} \cos s \varphi \sin^s \zeta P_s & \sin s \varphi \sin^s \zeta P_s \\ \cos (s-1) \varphi \sin^{s-1} \zeta P_{s-1} & \sin (s-1) \varphi \sin^{s-1} \zeta P_{s-1} \\ \dots & \dots \\ & P_0 \end{array} \right.$$

und hierbei ist

$$c) \left\{ \begin{array}{l} P_s = 1, \\ P_{s-1} = \cos \zeta, \\ P_{s-2} = \cos^2 \zeta - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot (2s-1)}, \\ P_{s-3} = \cos^3 \zeta - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot (2s-1)} \cos \zeta, \\ P_{s-4} = \cos^4 \zeta - \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot (2s-1)} \cos^2 \zeta + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)}, \\ \dots \\ P_0 = \cos^s \zeta - \frac{s(s-1)}{2 \cdot (2s-1)} \cos^{s-2} \zeta + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2s-1)(2s-3)} \cos^{s-4} \zeta \dots \end{array} \right.$$

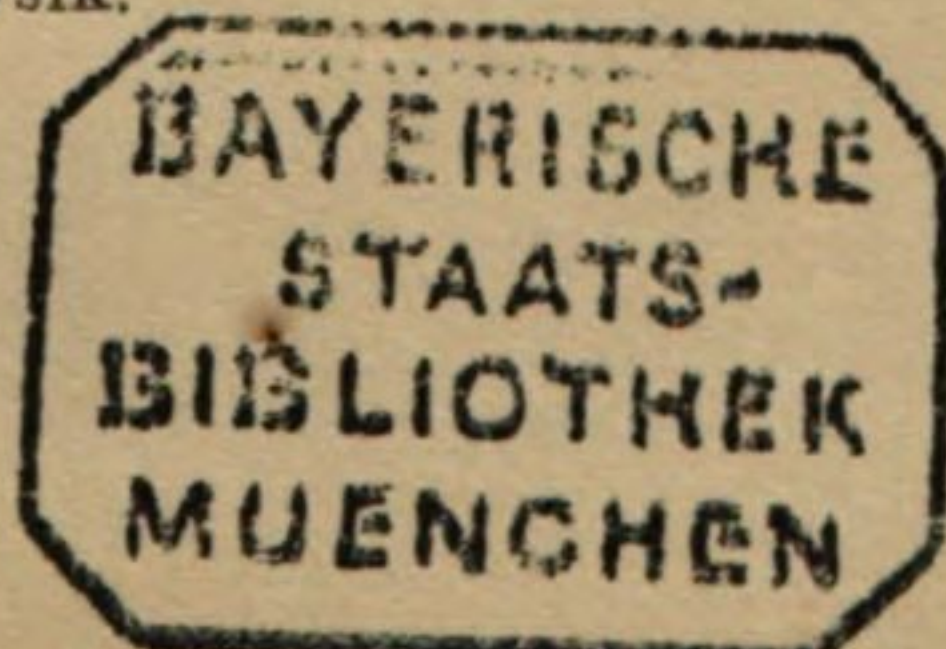
§ 28.

Die Potentialfunction von beliebigen homogenen und nicht homogenen Massen mit Hülfe der Sätze über die Kugelfunctionen entwickelt.

Mit Hülfe der bis jetzt erreichten Resultate sind wir in den Stand gesetzt, die Potentialfunctionen für homogene Körper, wenn die Gleichung der Oberfläche gegeben ist, zu berechnen.

Für ausserhalb gelegene Punkte haben wir, wenn wir nach ϱ integrieren und den Radius, welcher eine Function von φ und ζ oder von $a' b' c'$ sein wird, durch ϱ bezeichnen:

$$V_a = \frac{1}{3r} \int T_0 \varrho^3 d\omega + \frac{1}{4r^3} \int T_1 \varrho^4 d\omega + \frac{1}{5r^3} \int T_2 \varrho^5 d\omega \dots$$



Nun ist nach § 25 $\int T_n F = \frac{4\pi}{2n+1} F_n$; wir haben also:

$$a) \quad V_a = \frac{4\pi}{3 \cdot 1 r} (\varrho^3)_0 + \frac{4\pi}{4 \cdot 3 r^2} (\varrho^4)_1 + \frac{4\pi}{5 \cdot 5 r^3} (\varrho^5)_2 + \frac{4\pi}{6 \cdot 7 r^4} (\varrho^6)_3 \dots$$

Um die Potentialfunction für einen innerhalb gelegenen Punkt zu finden, zerlegen wir den Körper in eine Kugel vom Radius r und in eine darum liegende Schale von der Dicke $\varrho - r$ und erhalten durch Integration

$$b) \quad \left\{ \begin{aligned} V_i &= -\frac{2\pi r^2}{3} + 2\pi (\varrho^2)_0 + \frac{4\pi r}{3} \varrho_1 + \frac{4\pi r^2}{5} (\log \varrho)_2 \\ &\quad - \frac{4\pi r^3}{7} (\varrho^{-1})_3 - \frac{4\pi r^4}{2 \cdot 9} (\varrho^{-2})_4 - \frac{4\pi r^5}{3 \cdot 11} (\varrho^{-3})_5 \dots \end{aligned} \right.$$

Die Gültigkeit der beiden Formeln ist bis jetzt noch an die Voraussetzung geknüpft, dass im ersten Fall r grösser, als das grösste ϱ , und im zweiten Fall r kleiner, als das kleinste ϱ ist. Man sieht aber leicht ein, dass beide Formeln, so lange nur die durch sie ausgedrückten Reihen convergiren, für alle Punkte innerhalb und ausserhalb gelten müssen. Denn weder innerhalb noch ausserhalb eines homogenen Körpers erleiden die Differenzialcoefficienten der Potentialfunction eine Unterbrechung der Stetigkeit, wie wir uns oben in § 17 überzeugt haben.

Für's Ellipsoid z. B. hat man:

$$\begin{aligned} \varrho^{-2} &= p a'^2 + q b'^2 + r c'^2, \\ \log \varrho &= -\frac{1}{2} \log (p a'^2 + q b'^2 + r c'^2). \end{aligned}$$

Nun sieht man aus den Erörterungen über die Kugelfunctionen, dass ein Ausdruck, welcher höchstens von der n^{ten} Dimension in Bezug auf $a' b' c'$ ist, auch höchstens Kugelfunctionen bis zum n^{ten} Grade enthalten kann, und dass ferner wegen der Symmetrie des Ellipsoids Kugelfunctionen mit ungeraden Exponenten bei der Entwicklung von V_i gar nicht auftreten werden. Hieraus sieht man sogleich, dass für's Ellipsoid, wie wir bereits auf anderem Wege gefunden haben:

$$V_i = \text{Const.} + P a^2 + Q b^2 + R c^2$$

sein muss und dass die Coefficienten P, Q, R nicht von der absoluten Grösse der Achsen, sondern nur von deren Verhältniss abhängen werden.

Ist der Körper, dessen Potentialfunction berechnet werden soll, nicht homogen, so zerlegt man ihn durch die Flächen gleicher Dichte in Schichten gleicher Dichte. Sind z. B. die Flächen gleicher Dichte

Rotationsellipsoide von sehr geringer Abplattung, so ist die Gleichung ihres Radius

$$\varrho = R(1 + \mu c'^2),$$

wobei R den Radius des Aequators und μ einen Factor bedeutet, der constant sein oder von R abhängen kann. Es ist daher ϱ im Allgemeinen eine Function des Parameters R und der Winkel φ und ξ .

Bezeichnet man die Potentialfunctionen des Körpers, dessen Radius ϱ und dessen Dichte gleich 1 ist, für äussere Punkte durch V_a und für innere Punkte durch V_i , so ist die Potentialfunction einer dünnen Schicht ausserhalb derselben, wenn s die Dichte bedeutet:

$$s \frac{d V_a}{d R} \cdot d R$$

und innerhalb:

$$s \frac{d V_i}{d R} \cdot d R.$$

Man hat daher für einen Punkt, welcher auf der Oberfläche der gleichen Dichte liegt, deren Parameter R ist:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{V}{4\pi} = & \frac{1}{3\varrho} \int_0^R s \frac{d(\varrho^3)_0}{dR} \cdot dR + \frac{1}{4 \cdot 5 \varrho^2} \int_0^R s \frac{d(\varrho^4)_1}{dR} \cdot dR \\ & + \frac{1}{5 \cdot 5 \varrho^3} \int_0^R s \frac{d(\varrho^5)_2}{dR} \cdot dR \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{2} \int_R^1 s \frac{d(\varrho^2)_0}{dR} \cdot dR + \frac{\varrho}{3} \int_R^1 s \frac{d\varrho_1}{dR} \cdot dR + \frac{\varrho^2}{5} \int_R^1 s \frac{d(\log \varrho)_2}{dR} \cdot dR \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{c)} \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Länge des äussersten Radius gleich 1 gesetzt.

Besteht z.B. für die Flächen gleicher Dichte die Gleichung

$$\varrho = R(1 + \mu c'^2),$$

wobei μ eine sehr kleine Grösse bedeutet, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so haben wir:

$$(\varrho^3)_0 = R^3 + R^3 \mu, \quad (\varrho^5)_2 = R^5 \mu (c'^2 - \frac{1}{3}),$$

$$(\varrho^2)_0 = R^2 + \frac{2}{3} R^2 \mu, \quad (\log \varrho)_2 = \mu (c'^2 - \frac{1}{3}).$$

Bezeichnet man nun das R unter dem Integralzeichen durch r , um Verwechslungen vorzubeugen, so hat man:

$$d) \left\{ \begin{aligned} \frac{V}{4\pi} &= \frac{1}{R} \int_0^R s r^2 dr + \frac{1}{3R} \int_0^R s \frac{d(r^3 \mu)}{dr} \cdot dr - \frac{\mu c'^2}{R} \int_0^R s r^2 dr \\ &+ \frac{(c'^2 - \frac{1}{3})}{5R^3} \int_0^R s \frac{d(r^5 \mu)}{dr} \cdot dr + \int_R^1 s r dr + \frac{1}{3} \int_R^1 s \frac{d(r^2 \mu)}{dr} \cdot dr \\ &+ \frac{R^2 (c'^2 - \frac{1}{3})}{5} \int_R^1 s \frac{d\mu}{dr} \cdot dr. \end{aligned} \right.$$

Von dieser Formel werden wir später Gebrauch machen.

§ 29.

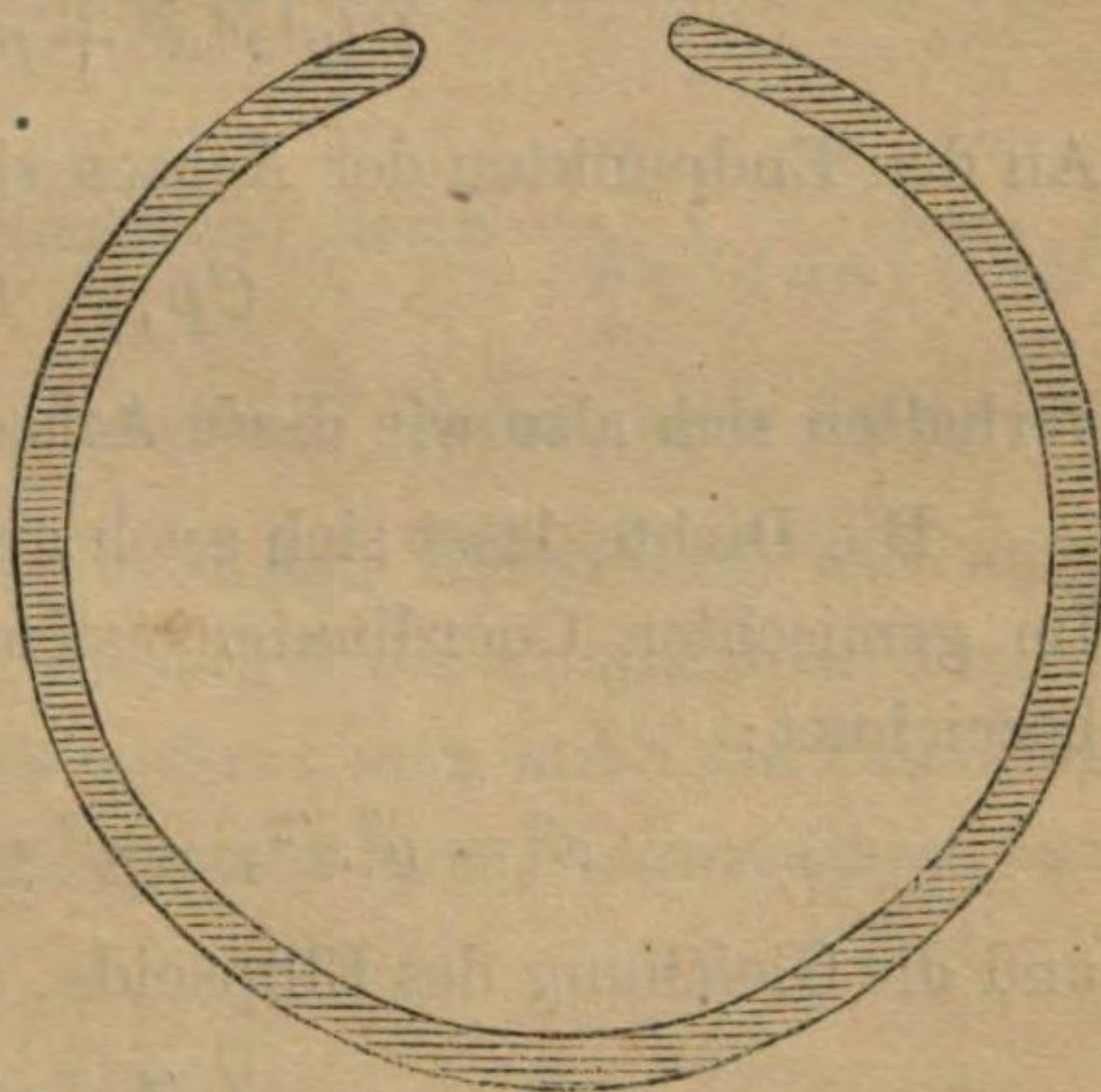
Die Vertheilung der Elektrizität auf Oberflächen im Zustande des Gleichgewichts, insbesondere beim Ellipsoid. Anderer Beweis des Satzes über die Potentialfunction des Ellipsoids ausserhalb desselben.

Wenn ein Stoff aus Punkten besteht, die sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetze abstossen, und zugleich dieser Stoff die Eigenschaft besitzt, dass er zwar innerhalb eines bestimmten Körpers vollkommen frei beweglich ist, die Oberfläche jedoch nicht überschreiten kann, so muss sich im Zustande des Gleichgewichts dieser Stoff auf der Oberfläche ansammeln. Dies ist klar, lässt sich aber auch analytisch darthun. Denn gesetzt, es befände sich im Innern des Körpers noch Stoff, so müsste überall im Innern $\frac{dV}{da} = \frac{dV}{db} = \frac{dV}{dc} = 0$ sein, denn ausserdem könnte ja kein Gleichgewicht stattfinden. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so muss auch innerhalb überall $\Delta^2 V = 0$ sein, kann sich also innerhalb kein wirkender Stoff befinden. In welcher Weise der wirkende Stoff, den wir kurz Elektrizität nennen wollen, sich auf der Oberfläche ausbreitet, haben wir bereits oben gesehen; es geschieht dies in der Art, dass überall die Potentialfunction den gleichen Werth hat. Man macht sich von der Vertheilung der Elektrizität über eine Fläche ein klares und deutliches Bild, wenn man sich den ganzen, von der Fläche umschlossenen Raum durch eine Wärmequelle, z. B. durch

siedendes Wasser, auf einer constanten Temperatur erhalten denkt und sich klar macht, welche Mengen von Wärme durch die einzelnen Theile der Oberfläche bei stationärem Temperaturzustand durchgehen. Die Menge der an einer Stelle in der Zeiteinheit durchgehenden Wärme stellt alsdann die Quantität der an jener Stelle befindlichen Elektricität vor.

Man sieht z. B. hieraus augenblicklich, dass sich an allen erhabenen Stellen einer Oberfläche mehr Elektricität ansammeln muss, als an den vertieften, dass namentlich an einer Spitze eine sehr grosse Elektricitätsdichtigkeit stattfinden muss, ohne dass jedoch die dort angesammelte Elektricitätsmenge einen bedeutenden Bruchtheil der ganzen auf der Oberfläche angesammelten Elektricität ausmachen könnte. Denkt man sich einen hohlen Körper mit einer sehr kleinen Oeffnung, so ist klar, dass sich auf der ganzen inneren Oberfläche nur beiläufig so viel Elektricität ansammeln kann, als auf der Oeffnung sich ansammeln würde, wenn sie geschlossen wäre. Denn denkt man sich einen Hohlraum, wie Fig. 3, mit siedendem Wasser angefüllt (das Schraffirte deutet das Wasser an), so ist klar, dass alle Wärme, welche durch das Loch austritt, nur durch die innere Oberfläche aus dem Hohlraum herauskommen kann, dass ferner im ganzen innern Raum bis zum Loch nahezu die Temperatur von 100 Grad herrschen muss und somit aus dem Loche heraus höchstens so viel Wärme kommen kann, als die Oberfläche des Loches aussenden würde, wenn sie durch einen Deckel geschlossen wäre.

Fig. 3.



So klar und anschaulich das Princip ist, nach welchem sich die Elektricität über geschlossene Oberflächen verbreitet, so schwierig ist die Berechnung der Dichtigkeit, wenn die Form der Oberfläche durch eine Gleichung gegeben ist.

Nur ein Fall bietet wenig Schwierigkeiten dar, wenn nämlich die Oberfläche ein Ellipsoid ist. Wir haben bereits oben in § 23 gesehen, dass der mit Stoff erfüllte Raum zwischen zwei concentrischen und ähnlichen Ellipsoiden im Innern keine Wirkung ausübt. Wenn sich also auf der Oberfläche eines Ellipsoids eine wirkende Masse von der Dichte befindet, welche durch die Entfernung zweier auf einanderfol-

gender concentrischer Schichten ausgedrückt wird, so ist die Potentialfunction dieser Masse auf diesem Ellipsoid und innerhalb desselben constant. Nun wird ein System ähnlicher concentrischer Ellipsoide durch die Gleichung ausgedrückt:

$$u = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2}.$$

Man sieht hieraus leicht, dass die Dichte sein muss:

$$\frac{dn}{du} = \frac{1}{\Delta u}.$$

Nun ist, wie man augenblicklich findet:

$$(\Delta u)^2 = \frac{4x^2}{p^4} + \frac{4y^2}{q^4} + \frac{4z^2}{r^4}.$$

Versteht man nun unter C einen Factor, welcher von der Menge der gesammten Elektricität abhängt, so ist die Dichte gleich

$$\frac{Cp^2q^2r^2}{V(q^4r^4x^2 + p^4r^4y^2 + p^4q^4z^2)}.$$

An den Endpunkten der Achsen sind die Dichten gleich

$$Cp, \quad Cq, \quad Cr,$$

verhalten sich also wie diese Achsen.

Die Dichte lässt sich auch geometrisch sehr anschaulich definiren. Im gemischten Coordinatensystem ist, wenn man den Radius mit ϱ bezeichnet:

$$x^2 = \varrho^2 x'^2, \quad y^2 = \varrho^2 y'^2, \quad z^2 = \varrho^2 z'^2,$$

und die Gleichung des Ellipsoids, dessen Halbachsen p, q, r sind, wird

$$\varrho^2 \left(\frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} + \frac{z'^2}{r^2} \right) = 1.$$

Wenn man nun die oben erwähnten Werthe von x^2, y^2, z^2 in den oben gefundenen Ausdruck für die Dichte substituirt, so erhält man, diese Dichte gleich s gesetzt:

$$s = C : \varrho \sqrt{\left(\frac{x'^2}{p^4} + \frac{y'^2}{q^4} + \frac{z'^2}{r^4} \right)}.$$

Bezeichnet man nun mit ϱ' den Radius eines neuen Ellipsoids, dessen Achsen p^2, q^2, r^2 sind, so hat man einfach:

$$s = C\varrho' : \varrho.$$

Das soeben gewonnene Resultat lässt sich auch ganz einfach auf directem Wege erreichen. Ist nämlich ϱ der Radius einer Fläche, s die Dichtigkeit der Elektrizität auf dieser Fläche in der Richtung des Radius, so ist die Potentialfunction innerhalb der Fläche gleich

$$\int s \varrho d\omega + r \int s T_1 d\omega + r^2 \int \frac{s T_2}{\varrho} d\omega + r^3 \int \frac{s T_3}{\varrho^2} d\omega \dots$$

Soll dieser Ausdruck constant sein, so müssen alle Integrale, welche mit Potenzen von r multiplicirt sind, verschwinden. Dies ist für's Ellipsoid der Fall, wenn man $s = \varrho$ setzt, d. h. wenn man die Dichtigkeit proportional der Dicke einer zwischen zwei ähnlichen concentrischen Ellipsoiden enthaltenen Schicht setzt.

Der Bedingung, dass die Potentialfunction im Innern constant werden soll, kann man auch genügen, wenn man $s = \text{Const.}$ und $\frac{1}{\varrho} = C + p a' + q b' + r c'$ setzt. Diese Gleichung lautet auch $C\varrho + p x + q y + r z = 1$ und lässt sich durch Drehung des Coordinatensystems auf die Form bringen: $C\varrho + p x = 1$, was ein Rotationsellipsoid bedeutet, das die X -Achse zur Rotationsachse hat, somit nur einen besondern Fall des vorigen bildet.

Nach § 15 ist die Dichte auf der Oberfläche gleich $-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dn a} + \frac{dV}{dn i} \right)$.

Ist nun $\frac{dV}{dn i} = 0$, so hat man $-\Delta V = 4\pi s$. Kennt man daher die Dichtigkeit der im Gleichgewicht befindlichen Elektrizität auf einer Oberfläche, so kann man auch leicht die Form der unmittelbar darauffolgenden Niveaufläche bestimmen. Bezeichnet man mit v die Potentialfunction, so kann man ein beliebiges System von Niveauflächen darstellen durch

$$F(x, y, z, v) = 0.$$

Das Gefälle dieser Niveauflächen ist gleich $\Delta F : F'_v$ (vergl. § 3). Man hat daher:

$$\Delta F : F'_v = -4\pi s.$$

Für den speciellen Fall:

$$F = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r} - 1 = 0$$

hat man: $s = C : \Delta F$, somit

$$F'_v = C (\Delta F)^2 = C \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} \right).$$

Hieraus sieht man, dass p , q , r um Cdv wachsen, wenn v um dv abnimmt, so dass also die nächste Niveaufläche des Ellipsoids wieder ein Ellipsoid ist, welches mit dem ersten gemeinschaftliche Brennpunkte hat, dass also überhaupt alle Niveauflächen unseres Ellipsoids confocale Ellipsoide sind. Da nun jede Masse bezüglich ihrer Wirkung nach aussen sich durch eine gleiche Masse ersetzen lässt, welche man auf einer Niveaufläche so vertheilt, dass die Potentialfunction innerhalb dieser Niveaufläche constant wird, so lässt sich auch eine zwischen zwei concentrischen und ähnlichen Ellipsoiden befindliche dünne Schicht ersetzen durch eine an Masse gleiche dünne Schicht zwischen zwei anderen concentrischen und ähnlichen Ellipsoiden, welche letztere mit den ersten confocal sind, und hieraus folgt wieder, dass zwei confocale Ellipsoide von gleicher Masse nach aussen gleiche Wirkung üben, was oben bereits auf anderm Wege bewiesen wurde.

Weicht die Gestalt der Oberfläche wenig von der Kugel ab, so ist die Vertheilung der Elektrizität mit Hülfe der oben erörterten Sätze über die Kugelfunctionen leicht zu bestimmen. In allen übrigen Fällen wird aber die Aufgabe schwierig und verlangt zur Lösung weitläufige Rechnungen. Weit weniger Schwierigkeiten hat man, wenn man die Aufgabe umkehrt und eine Potentialfunction als gegebene ansieht. Zieht man eine beliebige Niveaufläche dieser Potentialfunction in Betracht, so erhält man die Dichte der Elektrizität auf dieser Fläche nach § 15 und § 20, wenn man das Gefälle oder die absolute Kraft dieser Potentialfunction berechnet.

§ 30.

Die Vertheilung der Elektrizität auf gegebenen Oberflächen, wenn dieselben mit der Erde in leitender Verbindung stehen und unter dem Einflusse inducirender Massen sich befinden. Lösung für den speciellen Fall einer Kugel und eines inducirenden Massenpunktes

In § 16 haben wir gesehen, dass wir die Potentialfunction einer Masse ausserhalb derselben bestimmen können, wenn diese Potentialfunction auf einer beliebigen, diese Massen umschliessenden Fläche gegeben ist und wir die Dichtigkeit der Elektrizität wissen, welche durch eine, im angegriffenen Punkt concentrirte Masseneinheit auf der gegebenen Oberfläche durch Vertheilung angesammelt wird, während diese Oberfläche mit der Erde in leitender Verbindung steht. Es fragt sich daher zunächst, in welcher Weise vertheilt sich unter diesen Um-

ständen die Elektrizität auf einer gegebenen Fläche. Im Allgemeinen ist diese Frage schwer zu beantworten; nur für die Kugel wird die Lösung ziemlich einfach. Denkt man sich zwei entgegengesetzte Massenpunkte, m_1 und m_2 , und ist m_1 z. B. grösser als m_2 , so wird für Punkte von sehr grosser Entfernung $V = \frac{m_1 - m_2}{r}$, also positiv; für Punkte in der Nähe von m_1 wird V ebenfalls positiv; für Punkte in der Nähe von m_2 dagegen negativ. Es muss also irgendwo einen Raum, eine um den Punkt m_2 herumgehende geschlossene Fläche geben, für welche V gleich Null ist. Diese Fläche ist offenbar eine Rotationsfläche, deren Achse die Verbindungslinie der beiden wirkenden Punkte ist, und ihre Meridiancurve hat im Bipolarsystem, wenn man die von m_1 und m_2 ausgehenden Radien mit ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet, die Gleichung:

$$m_1 \varrho_2 = m_2 \varrho_1.$$

Diese Curve ist ein Kreis, also die Fläche eine Kugel. Denn nimmt man die Mitte der Linie $m_1 m_2$ als Centrum des rechtwinkligen Systems und setzt man $m_1 m_2 = 2a$, so ist:

$$\varrho_1^2 = (x - a)^2 + y^2, \quad \varrho_2^2 = (x + a)^2 + y^2.$$

Man hat somit als rechtwinklige Gleichung der gesuchten Curve

$$(x^2 + y^2) + 2ax \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 - m_2^2} + a^2 = 0,$$

oder auch

$$\left(x + a \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 - m_2^2}\right)^2 + y^2 = a^2 \left[\left(\frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 - m_2^2}\right)^2 - 1\right].$$

Bezeichnet man den Radius der Kugel mit R , so hat man:

$$a) \quad R = 2a \frac{m_1 m_2}{m_1^2 - m_2^2},$$

weil R gleich der Wurzel aus der rechten Seite der Gleichung ist. Die Entfernung des Centrums der Kugel vom Centrum des Coordinatensystems ist ferner gleich:

$$a \cdot \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1^2 - m_2^2},$$

es ist also, wenn man die Entfernung der Massen vom Centrum der Kugel mit r_1 und r_2 bezeichnet:

$$b) \quad r_1 = \frac{2a m_1^2}{m_1^2 - m_2^2}, \quad r_2 = \frac{2a m_2^2}{m_1^2 - m_2^2}.$$

Wir kennen nun eine Kugelfläche, auf welcher die Potentialfunction gleich Null wird. Ersetzen wir nun die Masse m_2 im Innern durch eine auf der Kugel verbreitete Masse, deren Dichtigkeit gleich dem Gefälle der Potentialfunction der Massen m_1 und m_2 oder gleich der absoluten Kraft der Massen m_1 und m_2 ist, so haben wir die Lösung unserer Aufgabe, da nach §§ 15 und 20 alsdann die Potentialfunction auf und ausserhalb der Kugelfläche unverändert bleibt.

Man sucht nämlich zuerst eine Potentialfunction

$$V = \frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_2}{\varrho_2},$$

welche den gegebenen Bedingungen für die Grösse der Kugel und die Entfernung des gegebenen Punktes vom Centrum dieser Kugel entspricht. Die absolute Kraft an der Oberfläche der Kugel ist alsdann:

$$c) \quad \frac{m_1}{\varrho_1^2} \cos(\varrho_1 n) - \frac{m_2}{\varrho_2^2} \cos(\varrho_2 n).$$

Nun ergibt die geometrische Anschauung:

$$\cos(\varrho_1 n) = \frac{R^2 + \varrho_1^2 - r_1^2}{2 R \varrho_1},$$

$$\cos(\varrho_2 n) = \frac{R^2 + \varrho_2^2 - r_2^2}{2 R \varrho_2}.$$

Zur Bestimmung der Masse m_2 und des Punktes r_2 , wenn R , r_1 , m_1 gegeben sind, hat man aus a) und b)

$$\frac{R}{r_1} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{R}{r_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

und hieraus

$$m_2 = m_1 \frac{R}{r_1}, \text{ sowie } r_1 r_2 = R^2,$$

oder mit Worten: Wenn eine Kugelfläche vom Radius R gegeben ist und in der Entfernung r vom Centrum dieser Kugelfläche sich ein Massenpunkt 1 befindet, so inducirt dieser innerhalb der Kugelfläche einen negativen Massenpunkt $\frac{R}{r_1}$ in der Entfernung $\frac{R^2}{r_1}$ vom Centrum der Kugel.

Die gesuchte Potentialfunction lautet also:

$$V = \frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_1 R}{r_1 \varrho_2}.$$

Nun ist auf der Oberfläche der Kugel

$$r_1 \varrho_2 = R \varrho_1,$$

woraus man findet:

$$-\frac{dV}{dn} = \frac{m_1}{R \varrho_1^2} [R \cos(\varrho_1 n) - r_1 \cos(\varrho_2 n)].$$

Substituirt man die für ϱ_2 und r_2 gefundenen Werthe in die Formel für $\cos(\varrho_2 n)$, so erhält man schliesslich:

$$s = \frac{m_1}{4\pi} \frac{R^2 - r_1^2}{R \varrho_1^3}$$

als Dichtigkeit der auf der Kugelfläche vom Radius R durch Vertheilung angesammelten Elektricität, wenn sich in der Entfernung r_1 vom Centrum ausserhalb der Kugel die Masse m_1 befindet.

Sieht man m_1 , ϱ_2 , r_2 als gegeben an, so findet man in gleicher Weise:

$$s = \frac{m_2}{4\pi} \frac{r_2^2 - R^2}{R \varrho_2^3},$$

wenn sich der Punkt m_2 innerhalb der Kugel befindet. Hieraus ergibt sich folgender interessante Satz:

Die Dichtigkeiten der Elektricität, welche durch eine in einem Punkte concentrirte Masse auf einer mit der Erde in Verbindung stehenden Kugel durch Vertheilung angesammelt wird, verhalten sich umgekehrt wie die Cuben der Entfernungen von diesem Punkte.

Ist die vertheilende Masse gleich 1, so ist die ganze auf der Kugel angesammelte Masse ausserhalb gleich $\frac{R}{r_1}$ und innerhalb gleich 1. Denn im ersten Falle, wenn der Punkt r_1 ausserhalb der Kugel sich befindet, musste die auf der Kugel befindliche Masse die innere Masse m_2 nach § 15 ersetzen, sie musste also gleich $\frac{R}{r_1}$ sein; im zweiten Falle musste die auf der Kugel befindliche Masse die Masseneinheit ersetzen. Diese Resultate ergeben sich auch ganz einfach aus c), denn man hat:

$$M = \int s d\sigma = \frac{m_1}{4\pi} \int \frac{\cos(\varrho_1 n)}{\varrho_1^2} d\sigma - \frac{m_2}{4\pi} \int \frac{\cos(\varrho_2 n)}{\varrho_2^2} d\sigma.$$

Nun hat man nach § 17 am Ende, da m_1 ausserhalb ist:

$$M = -m_2.$$

(Zu den Entwicklungen dieses Paragraphen ist die Fig. 1 zu vergleichen, welche die Potentialfunction zwischen einem Punkte und einer mit der Erde in Verbindung stehenden Kugelfläche darstellt.)

§ 31.

Fortsetzung und Lösung des allgemeinen Problems der beiden vorigen Paragraphen.

Unsere Aufgabe lässt sich noch in anderer Weise lösen. Nach § 21 ist nämlich für die Kugel:

$$V_i = f(r), \quad V_a = \frac{R}{r} f_i \left(\frac{R^2}{r} \right).$$

Nun ist nach § 15, wenn man den Radius immer nach aussen rechnet:

$$s = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV_i}{dr} - \frac{dV_a}{dr} \right) \text{ für } r = R.$$

Ist nun V_i gegeben gleich $f(r)$ und $\frac{df(r)}{dr} = f'(r)$, so hat man:

$$\frac{dV_i}{dr} - \frac{dV_a}{dr} = f'(r) + \frac{R}{r^2} f \left(\frac{R^2}{r} \right) + \frac{R^3}{r^3} f' \left(\frac{R^2}{r} \right).$$

Setzt man nun $r = R$, so hat man:

$$a) \quad 4\pi s = 2f'(R) + \frac{1}{R} f(R).$$

Ist nun im Punkte r_1 die Masseneinheit, so ist die Potentialfunction der auf der Kugel angesammelten Masse im Innern gleich

$$V_i = -[r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(r_1 r)]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\varrho} = f(r),$$

$$f'(r) = \frac{r - r_1 \cos(r_1 r)}{\varrho^3},$$

also nach Formel a), wie im vorigen Paragraphen:

$$4\pi s = \frac{R^2 - r_1^2}{R\varrho^3},$$

wenn der Punkt r_1 ausserhalb liegt. Liegt der Punkt innerhalb, so hat man dieselbe Rechnung.

Diese Resultate lassen sich aber auch noch in anderer Weise ausdrücken. Nach § 2 haben wir nämlich, wenn r_1 ausserhalb der Kugel liegt:

$$- V_i = + f(r) = \frac{T_0}{r_1} + \frac{r T_1}{r_1^2} + \frac{r^2 T_2}{r_1^3} \dots,$$

und wenn r_1 innerhalb der Kugel liegt:

$$- V_a = f(r) = \frac{T_0}{r} + \frac{r_1 T_1}{r^2} + \frac{r_1^2 T_2}{r^3} \dots$$

Hieraus haben wir:

$$b) \quad - 4\pi R s = \frac{T_0}{r_1} + \frac{3 R T_1}{r_1^2} + \frac{5 R^2 T_2}{r_1^3} \dots,$$

wenn der Punkt r_1 ausserhalb liegt, und

$$c) \quad - 4\pi R s = \frac{T_0}{R} + \frac{3 r_1 T_1}{R^2} + \frac{5 r_1^2 T_2}{R^3} \dots,$$

wenn r_1 innerhalb liegt.

Nach § 21 ist die Potentialfunction einer beliebigen Masse ausserhalb derselben

$$V = \sum \frac{U_n}{r^{n+1}},$$

wobei U_1, U_2 Functionen der Cosinus a', b', c' sind. Auf einer Kugel-
fläche vom Radius R hat man:

$$V_R = \sum \frac{U_n}{R^{n+1}}.$$

Wendet man nun die Formeln b) und § 16 an, so erhält man:

$$d) \quad \sum \frac{U_n}{r^{n+1}} = \frac{1}{4\pi} \int V'_R \sum \frac{R^{n+1} (2n+1) T_n}{r^{n+1}}.$$

Durch den Strich bei V'_R unter dem Integralzeichen wird angedeutet, dass V_R unter dem Integralzeichen veränderlich ist, somit als Function von x', y', z' anstatt von a', b', c' angesehen werden muss. Aus d) ergibt sich:

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int T_n R^{n+1} \sum \frac{U_m}{R^{m+1}}.$$

Da nun R ganz beliebig ist, U_n aber nicht von R abhängt, so hat man, wie bereits in § 25 bewiesen wurde:

$$\int T_n U_m = 0,$$

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int T_n U_n.$$

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir den Punkt r im Innern der Kugel annehmen und von der Formel c) Gebrauch machen.

Die allgemeine Aufgabe, die Dichtigkeit der Elektrizität zu finden, welche durch ein beliebiges Massensystem auf einer beliebigen Fläche inducirt wird, lässt sich in folgender Weise lösen. Nach § 20 ist die Potentialfunction dieses Massensystems im Innern der Fläche:

$$V = \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \int V d\omega,$$

d. h. man erhält die Function V weniger einem Rest R , wenn man die Oberfläche mit Stoff von der Dichte $\frac{dV}{dn}$ belegt. Bezeichnen wir diese Rest-Potentialfunction durch V' , so haben wir:

$$V' = V - \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r}.$$

Mit dieser Restfunction verfahren wir wieder wie mit der ursprünglichen und erhalten so eine kleinere Restfunction:

$$V'' = V - 2 \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \int \frac{d\sigma}{r} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn},$$

oder ganz allgemein:

$$V_m = V - m \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} \dots$$

Addirt man die aus diesen successiven Restfunctionen folgenden Dichtigkeiten, so hat man:

$$e) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi s' = \frac{dV}{dn}, \\ 4\pi s'' = \frac{2 dV}{dn} - \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} \\ \dots \dots \dots \\ 4\pi s_m = m \frac{dV}{dn} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} \dots, \end{array} \right.$$

und hieraus s , wenn man m unendlich werden lässt.

Ist z. B. für die Kugel $V = \varrho^p V_p$, wobei ϱ die Entfernung vom Centrum der Kugel bedeutet, und ist der Radius dieser Kugel gleich 1, so hat man:

$$\frac{dV}{dn} = p V_p, \quad \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} = \frac{p^2}{2p+1} V_p \text{ u. s. f.},$$

somit:

$$\frac{4\pi s_m}{2p+1} = V_p \left[\frac{mp}{2p+1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{p^2}{(2p+1)^2} \dots \right],$$

$$\frac{4\pi s_m}{2p+1} = V_p \left[1 - \left(\frac{p+1}{2p+1} \right)^m \right].$$

Für $m = \infty$ hat man, wie wir bereits auf anderem Wege wissen:

$$4\pi s = (2p+1) V_p.$$

Man kann diese Methode passend die Exhaustionsmethode nennen; denn sie besteht darin, dass man die Function aus dem Innern herausschöpft und auf der Oberfläche ausbreitet, den gleichsam durch die Löcher der Oberfläche durchfallenden Rest wieder auf diese aufschöpft und so weiter fortfährt, bis der Rest so gering geworden ist, dass er vernachlässigt werden kann.

Dieselbe Methode lässt sich auch benutzen, um das Problem zu lösen, die Dichte der Elektrizität zu finden, welche sich im Zustande des Gleichgewichts über eine Fläche ausbreitet.

Belegt man nämlich zuerst die Fläche überall gleichmässig, so hat man $V = \int \frac{d\sigma}{r}$ und

$$f) \quad s_m = 1 - m \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \dots,$$

und hieraus s für $m = \infty$. Zur praktischen Berechnung für gegebene Flächen sind übrigens diese Formeln wenig empfehlenswerth, da sie, wie man aus dem Beispiel der Kugel sieht, viel zu langsam convergiren.

III. Abtheilung.

Die hauptsächlichsten physikalischen Probleme, welche sich auf die Theorie der Potentialfunction stützen.

§ 32.

Die Entladung der Leydener Flasche und die hierdurch hervorgebrachte lebendige Kraft.

Denkt man sich, wie dies bei der Franklin'schen Tafel oder der Leydener Flasche der Fall ist, dass zwei dünne Platten überall gleichweit gegenüberstehen und die eine mit der Erde in leitende Verbindung gebracht ist, so sieht man leicht ein, dass folgende Sätze gelten.

Wird die eine Platte durch Verbindung mit einer Elektrizitätsquelle auf einem bestimmten Niveau erhalten und man nähert beide Platten, so laden sich beide immer stärker mit Elektrizität. Sind die beiden Platten sehr nahe, so sammelt sich fast alle Elektrizität auf den beiden gegenüberstehenden Flächen der Platten, und die auf beiden Platten sich ansammelnden Mengen sind nahezu gleich und proportional dem Niveau der Elektrizitätsquelle, welche mit der einen Platte in Verbindung steht, sowie umgekehrt proportional der Entfernung beider Platten. Denn denkt man sich die eine Platte durch siedendes Wasser auf der Temperatur von 100° , die andere durch schmelzendes Eis auf der Nulltemperatur erhalten, so muss im stationären Temperaturzustande fast alle Wärme, die von der einen Platte ausströmt, durch die der andern Platte zugekehrte Fläche ausströmen und durch die entsprechende Fläche der andern Platte einströmen. Die Menge der aus- und einströmenden Wärme ist proportional dem Gefälle, d. h. der Temperaturdifferenz beider Platten dividirt durch ihre Entfernung. Bezeichnet man die Quantität der auf jeder der beiden Platten angesammelten Elektrizität mit Q , das Niveau mit N , die Fläche der

Platten, soweit sie sich gegenüberstehen, mit F , die Dicke der isolirenden Schicht mit d , so hat man nach dem Gesagten, sowie nach den Auseinandersetzungen in § 15

$$Q = \frac{NF}{4\pi d} \text{ oder } N = \frac{4\pi Qd}{F}.$$

Das Potential der gesammten Masse ist $\frac{QN}{2}$, und dies ist nach § 6 auch die Quantität der lebendigen Kraft, welche durch Entladung zum Vorschein kommt. Diese Kraft ist daher

$$\frac{2\pi Q^2 d}{F} = \frac{N^2 F}{8\pi d}.$$

Ein Beispiel wird das Gesagte noch anschaulicher machen. Denken wir uns, eine Vollkugel sei von einer Kugelschale in der Weise concentrisch umgeben, dass die innere Vollkugel durch einen dünnen isolirten Draht mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt sei; denken wir uns ferner, dass die äussere Schale mit einem Conductor in Verbindung stehe, so wird auf der Oberfläche der Vollkugel gerade so viel Elektricität angehäuft sein, wie auf der innern Fläche der Kugelschale. Denn alle Wärme, welche von der innern Fläche dieser Schale ausströmt, muss durch die Vollkugel durchpassiren. Ist die Quantität der auf der äussern Oberfläche der Kugelschale angesammelten Elektricität gleich q , die Quantität der auf der innern Oberfläche angesammelten Elektricität, welche gleich der auf der Vollkugel befindlichen ist, gleich Q , der Radius der Vollkugel gleich R , die Dicke der isolirenden Schicht gleich d , so ist die Potentialfunction im Innern der Vollkugel gleich

$$0 = -\frac{Qd}{R} + q.$$

Die Potentialfunction auf der Kugelschale ist gleich der des Conductors. Nennen wir diese N , so haben wir:

$$N = \frac{q}{R}.$$

Die erste Gleichung giebt:

$$q = \frac{Qd}{R}$$

und zeigt, dass die Quantität der auf der äussern Oberfläche angesammelten Elektricität nur einen kleinen Bruchtheil der gesammten Elektricität bildet. Die zweite Gleichung in Verbindung mit der ersten giebt:

$$Q = \frac{NR^2}{d} = \frac{NF}{4\pi d}$$

und beweist, dass sich die gebundenen Elektricitäten verhalten wie die Flächen und, umgekehrt, wie die Dicken der Schichten.

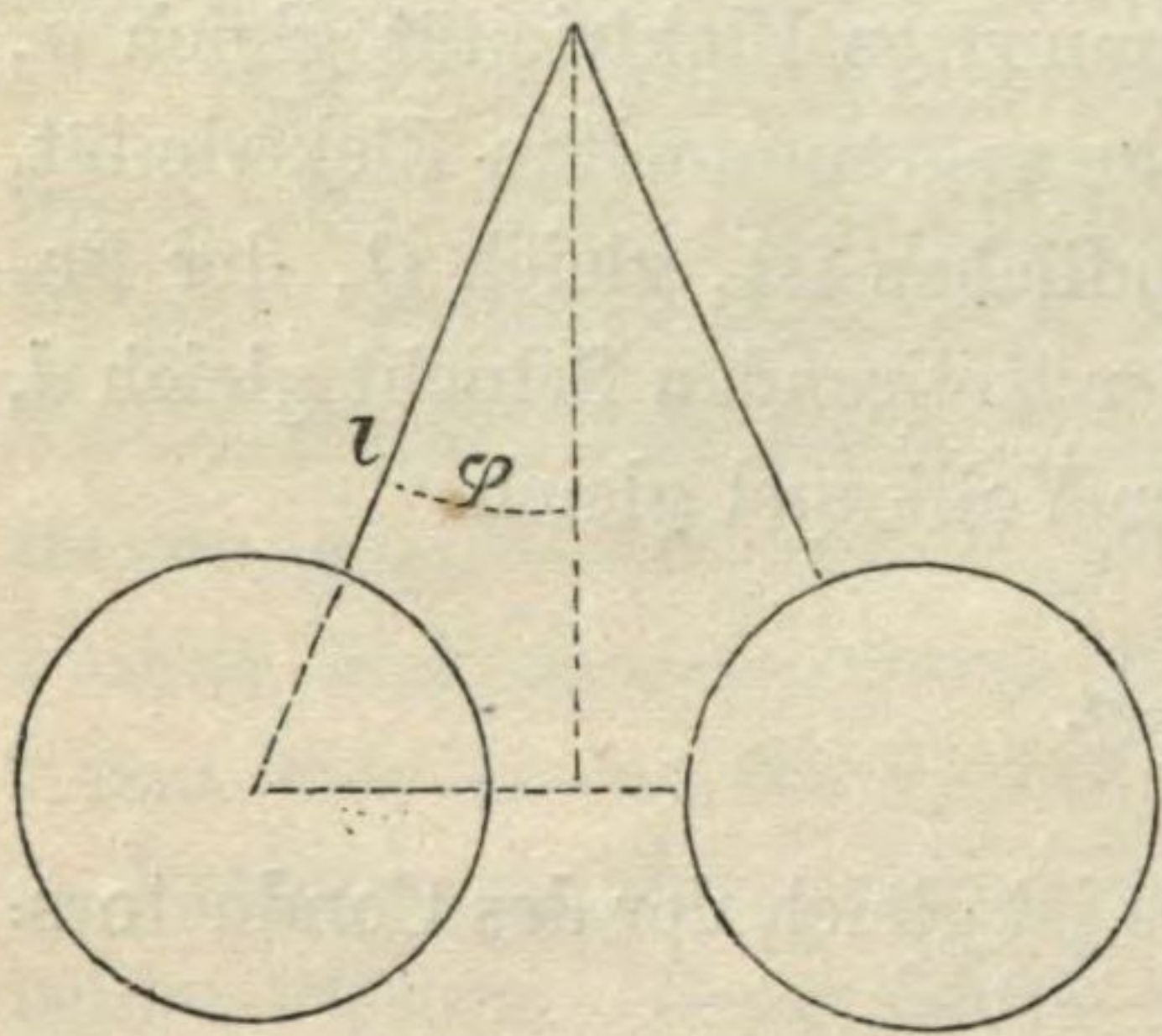
Um ein bestimmtes Mass für die Einheit der Elektricitätsmenge zu gewinnen, denken wir uns zwei gleich grosse Kugeln gleich stark mit Elektricität geladen, nennen Q die Quantität der auf jeder Kugel angesammelten Elektricität, r die Entfernung der Kugeln und κ die Kraft; alsdann ist:

$$\frac{Q^2}{r^2} = \kappa.$$

Nimmt man als Längeneinheit den Decimeter, als Krafteinheit die Schwere des Kilogramms, so ist die Elektricitäts-einheit gleich der Quantität, welche erforderlich ist, um in der Entfernung eines Decimeters gegen die gleiche Quantität die abstossende Kraft eines Kilogramms auszuüben.

Denkt man sich am Conductor einer Elektrisirmaschine ein Elektroskop angebracht (Fig. 4), bei welchem die Gewichte der beiden Kugeln gleich m , die Radien gleich ϱ sind; nennt man ferner die Länge des

Fig. 4.



Drahtes l , die halbe Winkelöffnung φ , so ist die Entfernung der beiden Kugeln gleich $2l \sin \varphi$, die Kraft, welche in der Richtung der Verbindungslinie beider Kugeln wirken muss, um der Schwerkraft das Gleichgewicht zu halten, gleich $m \operatorname{tg} \varphi$. Ist nun das Niveau auf dem Conductor und den Kugeln gleich N , so ist die Quantität der auf einer Kugel befindlichen Elektricität gleich $N \varrho$, also:

$$\frac{N^2 \varrho^2}{r^2} = m \operatorname{tg} \varphi$$

oder:

$$N^2 = \frac{4l^2}{\varrho^2} m \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi.$$

Das Potential der Elektricität, welche auf einer Batterie befindlich ist, die mit dem Conductor in leitender Verbindung steht, berechnet sich somit auf:

$$\frac{F}{d} \cdot \frac{l^2 m \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi}{2 \pi \varrho^2}.$$

Wird z. B. alle durch die Entladung gewonnene lebendige Kraft zur Erzeugung von Wärme verwendet und nimmt man, wie bereits oben gesagt, als Längeneinheit den Decimeter, als Krafteinheit das Kilogramm, so ist die der Wärmeeinheit entsprechende Arbeit gleich 4240, also die erzeugte Wärme

$$\frac{F}{d} \cdot \frac{l^2 m \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi}{8480 \pi \varrho^2}.$$

Diese Formel gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die beiden Kugeln im Verhältniss zu ihrer Entfernung klein sind; denn nur unter dieser Voraussetzung ist die auf ihnen sich ansammelnde Quantität gleich $N\varrho$ und die Anziehung gleich $\frac{N^2 \varrho^2}{r^2}$. Stehen sich die beiden Kugeln sehr nahe, so sammelt sich nicht blos weniger Elektrizität auf denselben an, sondern die von derselben ausgeübte Kraft ist auch geringer, als ob sie im Centrum vereinigt wäre. Die gewonnene lebendige Kraft ist also grösser, als die in obiger Formel angegebene.

Im Allgemeinen ist die zwischen zwei Kugeln wirkende Kraft gleich

$$N^2 f(s, \varrho),$$

wenn s die Entfernung der Centra beider Kugeln, ϱ ihren Radius und N das Niveau bedeutet. Wir haben daher allgemein als Ausdruck für die erzeugte lebendige Kraft:

$$\frac{F}{d} \cdot \frac{m \operatorname{tg} \varphi}{8 \pi f(s, \varrho)}.$$

Mit der Bestimmung der Function $f(s, \varrho)$ werden wir uns später (§ 46) eingehender beschäftigen.

§ 33.

Die Gestalt eines rotirenden homogenen flüssigen Körpers.

Wenn ein Körper, dessen Theilchen gegenseitig durch die Schwerkraft auf einander wirken, rotirt, so ist nach bekannten mechanischen Gesetzen die Centrifugalkraft gleich ϱv^2 , wenn v die Winkelgeschwindigkeit und ϱ den Abstand von der Rotationsachse bedeutet. Ist die Rotationsachse die Z -Achse, so sind die Projectionen der Centrifugalkraft:

$$a v^2, \quad b v^2, \quad 0.$$

Auf einen beliebigen Punkt im Innern wirkt die Kraft:

$$\frac{dV}{da} + av^2, \quad \frac{dV}{db} + bv^2, \quad \frac{dV}{dc}.$$

Setzt man:

$$\Pi = V + (a^2 + b^2) \frac{v^2}{2},$$

so sind die Projectionen der Kraft:

$$\frac{d\Pi}{da}, \quad \frac{d\Pi}{db}, \quad \frac{d\Pi}{dc},$$

und $\Pi = \text{Const.}$ ist die Gleichung der Niveaufläche oder Oberfläche. Ist der Körper flüssig, so bedeutet $\Pi = \text{Const.}$ eine Fläche des gleichen Druckes, und wenn Gleichgewicht stattfinden soll, so muss der Druck an der Oberfläche constant sein oder die Oberfläche die Gleichung haben:

$$\Pi = V + (a^2 + b^2) \frac{v^2}{2} = \text{Const.}$$

(Immer unter der Voraussetzung, dass der flüssige Körper überall von gleicher Dichte ist.)

Nun ist für's Rotationsellipsoid:

$$V = \frac{P(a^2 + b^2)}{2} + \frac{Rc^2}{2} + C.$$

Man hat daher für das rotirende Ellipsoid:

$$\Pi = (P + v^2) \frac{(a^2 + b^2)}{2} + \frac{Rc^2}{2} + C.$$

Setzt man nun:

$$(P + v^2) : R = p : r,$$

so ist die Fläche des gleichen Druckes zugleich die Fläche des Rotationsellipsoids, dessen Gleichung ist:

$$p(a^2 + b^2) + rc^2 = C.$$

Da nun $r : p$ (§ 23) $= 1 + \mu^2$ ist, so kann man auch setzen:

$$\text{a) } P + v^2 = R : (1 + \mu^2).$$

Nimmt man als Krafteinheit die Kraft, welche eine Kugel vom Radius 1 und der Dichte 1 an ihrer Oberfläche ausübt, so hat man, weil diese Kraft gleich $\frac{4\pi}{3}$ ist:

$$P = \frac{3s}{\mu^3} \left[\frac{\mu}{2} - \frac{(1 + \mu^2) \operatorname{arctg} \mu}{2} \right],$$

$$R = \frac{3(1 + \mu^2)}{\mu^3} (\operatorname{arctg} \mu - \mu),$$

oder für $\mu < 1$:

$$P = s \left(-1 + \frac{3\mu^2}{3.5} - \frac{3\mu^4}{5.7} + \frac{3\mu^6}{7.9} \dots \right),$$

$$R = s(1 + \mu^2) \left(-1 + \frac{3\mu^2}{5} - \frac{3\mu^4}{7} \dots \right),$$

und für $\mu > 1$:

$$P = s \left(-\frac{3\pi}{4\mu} + \frac{3}{\mu^2} - \frac{3\pi}{4\mu^3} + \frac{3}{1.3\mu^4} - \frac{3}{3.5\mu^6} \dots \right),$$

$$R = s(1 + \mu^2) \left(-\frac{3}{\mu^2} + \frac{3\pi}{2\mu^3} - \frac{3}{1\mu^4} + \frac{3}{3\mu^6} \dots \right).$$

Wenn man nun diese Ausdrücke in a) substituirt, erhält man:

$$b) \quad \frac{\mu^3 v^2}{3s} = \frac{(3 + \mu^2)}{2} \operatorname{arctg} \mu - \frac{3\mu}{2},$$

oder in Reihen aufgelöst für $\mu < 1$:

$$c) \quad \frac{v^2}{3s} = \frac{2\mu^2}{3.5} - \frac{4\mu^4}{5.7} + \frac{6\mu^6}{7.9} \dots,$$

und für $\mu > 1$:

$$d) \quad \frac{v^2}{3s} = \frac{\pi}{4\mu} - \frac{2}{\mu^2} + \frac{3\pi}{4\mu^3} - \frac{4}{1.3\mu^4} + \frac{6}{3.5\mu^6} \dots$$

Man sieht hieraus, dass, wenn v^2 sehr klein ist, μ entweder sehr klein oder sehr gross sein kann. Im ersten Fall hat man:

$$\mu^2 = \frac{5v^2}{2s},$$

und im andern:

$$\mu = \frac{3\pi s}{4v^2}.$$

An der Oberfläche der Erde z. B. ist die Geschwindigkeit des frei fallenden Körpers nach einer Sekunde gleich 9,8 met.; der Radius der Erde ist gleich $\frac{20000000}{\pi}$ met. Die Beschleunigung des frei fallenden Körpers in Theilen des Radius ausgedrückt, ist also:

$$\frac{9,8 \pi}{20000000}.$$

Da als Zeiteinheit die Sekunde genommen wurde, so ist

$$v^2 = \left(\frac{2 \pi}{24.3600} \right)^2,$$

und da ferner der Radius der Erde als Einheit genommen wurde und als Einheit der Kraft diejenige Kraft, welche eine Kugel vom Radius 1 und der Dichte 1 an ihrer Oberfläche ausübt, so muss man setzen:

$$s = \frac{9,8}{20000000}.$$

Man hat somit:

$$\frac{v^2}{s} = \frac{(2 \pi)^2 \cdot 20000000}{24^2 \cdot 3600^2 \cdot 9,8 \pi} = 0,00343,$$

$$\mu^2 = \frac{5 v^2}{2 s} = 0,00858.$$

Das Verhältniss der grossen Achse zur Rotationsachse ist $\sqrt{\frac{r}{p}} = \sqrt{1 + \mu^2}$.

Ist μ sehr klein, so ist die Abplattung

$$\frac{\mu^2}{2} = 0,00429 = 1 : 230.$$

Dies ist die Abplattung, welche die Erde bei ihrer jetzigen Umdrehungszeit erhalten würde, wenn sie flüssig und überall von gleicher Dichte

wäre. Ist μ sehr gross, so ist $\sqrt{\frac{r}{p}} = \mu$, das Verhältniss der Achsen wäre also:

$$\mu : 1 = 3 \pi : \frac{4 v^2}{s} = 686 : 1.$$

Man sieht also, dass bei gleicher Rotationsgeschwindigkeit derselbe Körper entweder eine sehr grosse oder eine sehr kleine Abplattung haben kann. Mehr als zwei Werthe kann aber μ nicht erhalten, was sich in folgender Weise zeigen lässt. Die Gleichung b) lässt sich auch schreiben:

$$\operatorname{arctg} \mu - \frac{2 \mu^3 v^2 + 9 \mu}{9 + 3 \mu^2} = 0.$$

Nennt man den Ausdruck links F und differenzirt ihn nach μ , so hat man:

$$\frac{6\mu^2 [\mu^4 v^2 + \mu^2 (10v^2 - 6) + 9v^2]}{(9 + 3\mu^2)^2 (1 + \mu^2)} = \frac{dF}{d\mu}.$$

Setzt man $\frac{dF}{d\mu} = 0$, so hat man:

$$\mu^4 v^2 + \mu^2 (10v^2 - 6) + 9v^2 = 0,$$

und hieraus für μ^2 höchstens zwei Werthe. Die Function F wird also nur zweimal der Abscissenachse der μ parallel, kann also diese nur zweimal durchschneiden und gleich Null werden. Ist v^2 sehr klein, so liegen diese Durchschnitte sehr weit aus einander. Wächst v^2 , so rücken sie immer näher zusammen und zwar so lange, bis v^2 sein Maximum erreicht. Dass ein solches Maximum vorhanden sein muss, ist einleuchtend; denn einmal muss ja die Geschwindigkeit, wenn sie beständig wächst, so gross werden, dass ihr die Attraction nicht mehr das Gleichgewicht zu halten vermag. Um den Werth von μ zu erhalten, für welchen v ein Maximum wird, braucht man nur die Gleichungen c) und d) zu differenziren und den Differenzialcoefficienten gleich Null zu setzen. Die Gleichung c) giebt nur positive Werthe des Differenzialcoefficienten; dagegen erhält man aus d):

$$0 = -\frac{3\pi}{4} + \frac{12}{\mu} - \frac{27\pi}{4\mu^2} + \frac{16}{\mu^3} - \frac{36}{5\mu^5} + \frac{192}{35\mu^7} - \frac{100}{21\mu^9} \dots,$$

und hieraus folgende Resultate:

$$\begin{aligned}\mu &= 2,529, \\ \sqrt{1 + \mu^2} &= 2,719, \\ \frac{v^2}{s} &= 0,3370.\end{aligned}$$

Man sieht also, dass bei einer homogenen flüssigen Masse, von welcher Grösse und Dichte sie auch sei, das Achsenverhältniss 2,719 : 1 dasjenige ist, für welches v^2 seinen grösstmöglichen Werth erhält.

Für die Erde hatten wir oben bei 24 Stunden Umdrehungszeit:

$$\frac{v^2}{s} = 0,00343.$$

Ist die Umdrehungszeit gleich h Stunden, so ist

$$\frac{v^2}{s} = \frac{0,00343 \cdot 24^2}{h^2}.$$

Um die kürzeste Umdrehungszeit der homogen gedachten Erde zu finden, hat man also:

$$\frac{0,00343 \cdot 24^2}{h^2} = 0,3370$$

und hieraus:

$$h = 2 \text{ Stunden } 25 \text{ Minuten.}$$

Aus den seitherigen Formeln ergibt sich das bemerkenswerthe Resultat, dass die Abplattung nur von der Drehgeschwindigkeit und dem specifischen Gewicht, aber nicht von der Grösse des Ellipsoids abhängt. Bei gleicher Abplattung wächst die Dichte mit dem Quadrat der Drehgeschwindigkeit; ein Körper von vierfacher Dichte hat also bei doppelter Drehgeschwindigkeit dieselbe Abplattung.

Nach dem in § 10 erörterten Satze bleibt das Drehungsmoment constant, wenn keine äussere Kraft einwirkt. Nun ist, wie sich leicht berechnen lässt, das Trägheitsmoment des Ellipsoids gleich $\frac{s}{p^2 \sqrt{r}}$ mal dem Trägheitsmoment der Kugel vom Radius 1 und specifischen Gewicht 1, und die Masse gleich $\frac{s}{p \sqrt{r}}$ mal der Masse einer solchen Kugel. Nimmt man die Masse und das Trägheitsmoment dieser Kugel als Einheiten, so hat man, indem man zugleich das constante Drehungsmoment durch M und die constante Masse durch m bezeichnet:

$$v = \frac{p^2 \sqrt{r} \cdot M}{s}, \quad s = p \sqrt{r} \cdot m.$$

Setzt man nun $r : p = 1 + \mu^2$ und eliminirt p mit Hülfe der zweiten dieser Gleichungen, so erhält man:

$$v = \frac{M s^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{5}{3}} (1 + \mu^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Ist M sehr gross, so hat man $\frac{v^2}{s} = \frac{3\pi}{4\mu}$ und wenn man den soeben gefundenen Werth von v hiermit vergleicht, so ergibt sich:

$$e) \quad \frac{M^2}{m^{\frac{10}{3}}} = \frac{3\pi}{4} \left(\frac{\mu}{s} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Für jedes Drehungsmoment, wenn dasselbe auch noch so gross sein sollte, giebt es demnach eine entsprechende Abplattung. Die lebendige Kraft des Rotationseffectes bleibt jedoch nicht constant, sondern diese ist gleich $\frac{v^2}{2}$ mal dem Trägheitsmoment, also gleich

$$\frac{M^3 s^{\frac{4}{3}}}{2 m^{\frac{10}{3}} (1 + \mu^2)^{\frac{2}{3}}},$$

nimmt somit beständig ab, wenn die Abplattung sich vergrössert. Die Differenz der ursprünglich vorhandenen lebendigen Kraft und der im Rotationseffect schliesslich noch vorhandenen lebendigen Kraft muss durch die Reibung der einzelnen Theilchen consumirt und in Wärme u. s. f. umgewandelt worden sein.

Aus Gleichung e) ergibt sich ferner, dass bei starker Abplattung das Verhältniss der Dichte zur Abplattung unverändert bleibt, wenn die Dichte sich ändert, somit bei eintretender Verdichtung die Abplattung grösser wird. Ist endlich das Drehungsmoment M sehr klein, so ist

$$v^2 = \frac{2s\mu^2}{5}, \text{ somit:}$$

$$\frac{M^2}{m^{\frac{10}{3}}} = \frac{2\mu^2}{5s^{\frac{1}{3}}}.$$

Es wächst also auch bei kleinen Drehungsmomenten die Abplattung mit der Dichte.

§ 34.

Die Gestalt eines rotirenden nicht homogenen flüssigen Körpers, insbesondere wenn die Rotationsgeschwindigkeit gering ist.

Zum Gleichgewicht einer rotirenden nicht homogenen flüssigen Masse ist erforderlich, dass die Flächen des gleichen Druckes und der gleichen Dichte überall zusammenfallen (§ 8).

Die Formeln für die Potentialfunction nicht homogener flüssiger Massen wurden bereits oben entwickelt. Durch sie kennen wir deren Potentialfunction als Function von R und c' , d. h. wir kennen durch sie die Potentialfunction in dem Punkte, welcher auf der Fläche gleicher Dichte mit der Aequatorialachse R in der Richtung c' liegt.

Ist die Drehgeschwindigkeit gleich Null, so sind die Schichten gleicher Dichte offenbar Kugeln. Findet nur eine ganz kleine Drehgeschwindigkeit statt, so haben wir nach dem Taylor'schen Satze für den Radius der Schichten gleicher Dichte die Gleichung:

$$\varrho = R [1 + (\alpha + \beta c'^2 + \gamma c'^4 \dots) v^2].$$

Ist v^2 verschwindend klein, so wird die Potentialfunction des Körpers von derselben Form. Denn alle Potenzen von ϱ haben dieselbe Form, die sie auch behalten, wenn man sie in Kugelfunctionen auflöst. Nun ist für die Schichten gleicher Dichte nach der Bedingung des Gleichgewichts:

$$a) \quad V = F(R) + \frac{(c'^2 - 1)}{2} \varrho^2 v^2.$$

Wenn man nun für ϱ^2 den oben angegebenen Werth substituirt, so hat man:

$$C + (\alpha' + \beta' c'^2 + \gamma' c'^4 \dots) v^2 = \text{Const.} + \frac{v^2 R^2}{2} (c'^2 - 1),$$

woraus man sieht, dass in der Potentialfunction des Körpers, wenn er sich langsam dreht, höchstens die zweite Potenz von c' vorkommen kann, dass somit auch der Radius selbst die Form hat:

$$\varrho = R [1 + (\alpha + \beta c'^2) v^2].$$

Setzt man weiter:

$$\varrho = R (1 + a v^2 + b v^4),$$

wobei a höchstens die zweite, b höchstens die vierte Potenz von c' enthält, so ist die Potentialfunction des Körpers von gleicher Beschaffenheit, und aus Gleichung a) sieht man, dass diese Voraussetzung richtig ist, dass überhaupt ϱ die Form hat:

$$b) \quad \varrho = R (1 + a v^2 + b v^4 \dots + c_n v^{2n} \dots),$$

wobei der Coefficient c_n aus Functionen von R und Potenzen von c'^2 bis zur n^{ten} einschliesslich besteht.

Ist die Schwungkraft v^2 so klein, dass man ihre höheren Potenzen vernachlässigen kann, so hat man nach dem soeben Entwickelten:

$$\varrho = R (1 + \mu c'^2).$$

Substituirt man nun in die Bedingung des Gleichgewichts

$$V = F(R) + \frac{v^2 R^2}{2} (c'^2 - 1)$$

den Ausdruck für V aus § 28, so erhält man, indem man die Summe aller mit c'^2 multiplicirten Glieder gleich Null setzt:

$$c) \quad \frac{-\mu}{R^3} \int_0^R s r^2 dr + \frac{1}{5 R^5} \int_0^R s \frac{d(r^5 \mu)}{dr} \cdot dr + \frac{1}{5} \int_R^{R_1} s \frac{d\mu}{dr} \cdot dr - \frac{v^2}{2} = 0.$$

In dem Ausdruck für V wurde zur Vereinfachung der constante Factor 4π weggelassen. Setzt man:

$$s = S_0 + S_1 r^2 + S_2 r^4 \dots = \sum S_p r^{2p},$$

$$\mu = M_0 + M_1 r^2 + M_2 r^4 \dots = \sum M_q r^{2q},$$

so hat man:

$$\frac{-\mu}{R^3} \int_0^R s r^2 dr = - \sum \sum \frac{S_p M_q}{2p+3} R^{2(p+q)},$$

$$\frac{1}{5R^5} \int_0^R s \frac{d(r^5 \mu)}{dr} \cdot dr = \sum \sum \frac{(2q+5) S_p M_q}{10(p+q)+25} \cdot R^{2(p+q)},$$

$$\frac{1}{5} \int_R^{R_1} s \frac{d\mu}{dr} \cdot dr = - \sum \sum \frac{q S_p M_q}{5(p+q)} \cdot R^{2(p+q)} \\ + \sum \sum \frac{q S_p M_q}{5(p+q)} R_1^{2(p+q)},$$

$$\frac{-v^2}{2} = \frac{-v^2}{2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichungen ist gleich Null, und dies kann nur dann der Fall sein, wenn die zu jeder Potenz von R gehörigen Glieder gleich Null sind. Setzt man $p+q=n$, so hat man $q=n-p$ und man findet nach gehöriger Reduction als Bedingung für's Gleichgewicht für jede Potenz von R , die 0^{te} ausgenommen:

$$\sum \left(\frac{1}{2p+3} + \frac{2p}{10n+25} - \frac{p}{5n} \right) S_p M_{n-p} = 0,$$

woraus sich die Coefficienten von μ bestimmen lassen, wenn die von s gegeben sind.

Bestimmt man die einzelnen Coefficienten von μ , so findet man, dass sie alle mit M_0 multiplicirt sind, dass man demgemäss einfacher setzt:

$$s = S_0 (1 + s_1 r^2 + s_2 r^4 \dots)$$

$$\mu = M_0 (1 + \mu_1 r^2 + \mu_2 r^4 \dots)$$

§ 35.

Die Excentricität der Schichten nimmt von innen nach aussen zu, wenn die Dichte von innen nach aussen abnimmt. Bestimmung des Gesetzes der Dichte, wenn die Abplattung gegeben ist.

Hat man z. B. $s = S_0 (1 - pr^2)$, so erhält μ die Form:

$$\mu = M_0 (1 + \alpha pr^2 + \beta p^2 r^4 + \gamma p^3 r^6 \dots)$$

und die Coefficienten α , β , γ sind der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0,17143, & \zeta &= 0,00655, \\
\beta &= 0,07428, & \eta &= 0,00378, \\
\gamma &= 0,03781, & \vartheta &= 0,00220, \\
\delta &= 0,02050, & \iota &= 0,00129, \\
\varepsilon &= 0,01148, & \kappa &= 0,00077, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Da nun pr^2 immer kleiner als die Einheit sein muss, da ja ausserdem die Dichte negativ werden würde, so convergirt die Reihe für μ sehr rasch und man sieht überhaupt, dass die Abplattung der einzelnen Schichten von innen nach aussen zunimmt, wenn die Dichte von innen nach aussen abnimmt.

Ist der äusserste Radius gleich 1, so ist die Schwungkraft am Aequator der Oberfläche gleich v^2 , die Schwerkraft, weil der Factor 4π wegfällt, gleich

$$\int_0^1 s r^2 dr.$$

Kennt man nun das Verhältniss von Schwerkraft und Schwungkraft am Aequator und nennt man dieses Q , so hat man:

$$v^2 = Q S_0 \int_0^1 \sum s_p r^{2p+2} dr = Q S_0 \sum \frac{s_p}{2p+3},$$

und aus Gleichung c) hat man:

$$Q \sum \frac{s_p}{2p+3} = \frac{4}{5} M_0 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum \sum \frac{q}{p+q} s_p m_q \right).$$

Nun ist die Abplattung an der Oberfläche gleich $-M_0 \sum m_q$. Nennt man diese A , so hat man:

$$Q \sum \sum \frac{s_p m_q}{2p+3} = \frac{4}{5} A \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sum \sum \frac{q}{p+q} s_p m_q \right).$$

Kennt man z. B. Q und A , so kann man hieraus das Gesetz, nach welchem die Dichte im Erdinnern zunimmt, beiläufig bestimmen. Setzt man z. B.

$$s = S_0 (1 - pr^2),$$

so hat man, wie man nach einer leichten Rechnung findet:

$$\frac{A}{Q} = \frac{5 - (3 - 5\alpha)p - (3\alpha - 5\beta)p^2 - (3\beta - 5\gamma)p^3 \dots}{4 - 6\alpha p + \frac{6(\alpha - 2\beta)}{2}p^2 + \frac{6(2\beta - 3\gamma)}{3}p^3 \dots}$$

Für unsere Erde hat man aus den Gradmessungen: $A = 0,00334$. Ferner ist $Q = 0,00346$. Substituirt man diese Werthe in die vorige Gleichung, so erhält man:

$$p = 0,80.$$

Nun ist die Masse der Erde gleich $4\pi S_0 \sum \frac{s_p}{2p+3}$; das Volumen $\frac{4\pi}{3}$, also das specifische Gewicht $S_0 \left(1 - \frac{3p}{5}\right)$. Nun wissen wir aus Versuchen, dass das specifische Gewicht der Erde gleich 5,4 ist. Wir können daher S_0 bestimmen und erhalten:

$$S_0 = 10, \quad S_0 (1 - p) = 2,$$

d. h. die Dichte im Centrum ist 10, an der Oberfläche 2.

Kennt man ausser der Abplattung, dem Werthe Q und dem specifischen Gewicht der Erde auch noch die mittlere Dichte der obersten Schichten, so kann man das Gesetz der Dichte noch mit grösserer Annäherung finden. Man kann nämlich setzen:

$$s = S_0 (1 + s_1 r^2 + s_2 r^4)$$

und nun die zwei Coefficienten s_1 und s_2 aufsuchen. Humboldt giebt im Kosmos die mittlere Dichte der Erde gleich 5,6 und die mittlere Dichte an der Oberfläche gleich 2,7 an. Man hat also die zwei Gleichungen:

$$S_0 \left(1 + \frac{3s_1}{5} + \frac{3s_2}{7}\right) = 5,6,$$

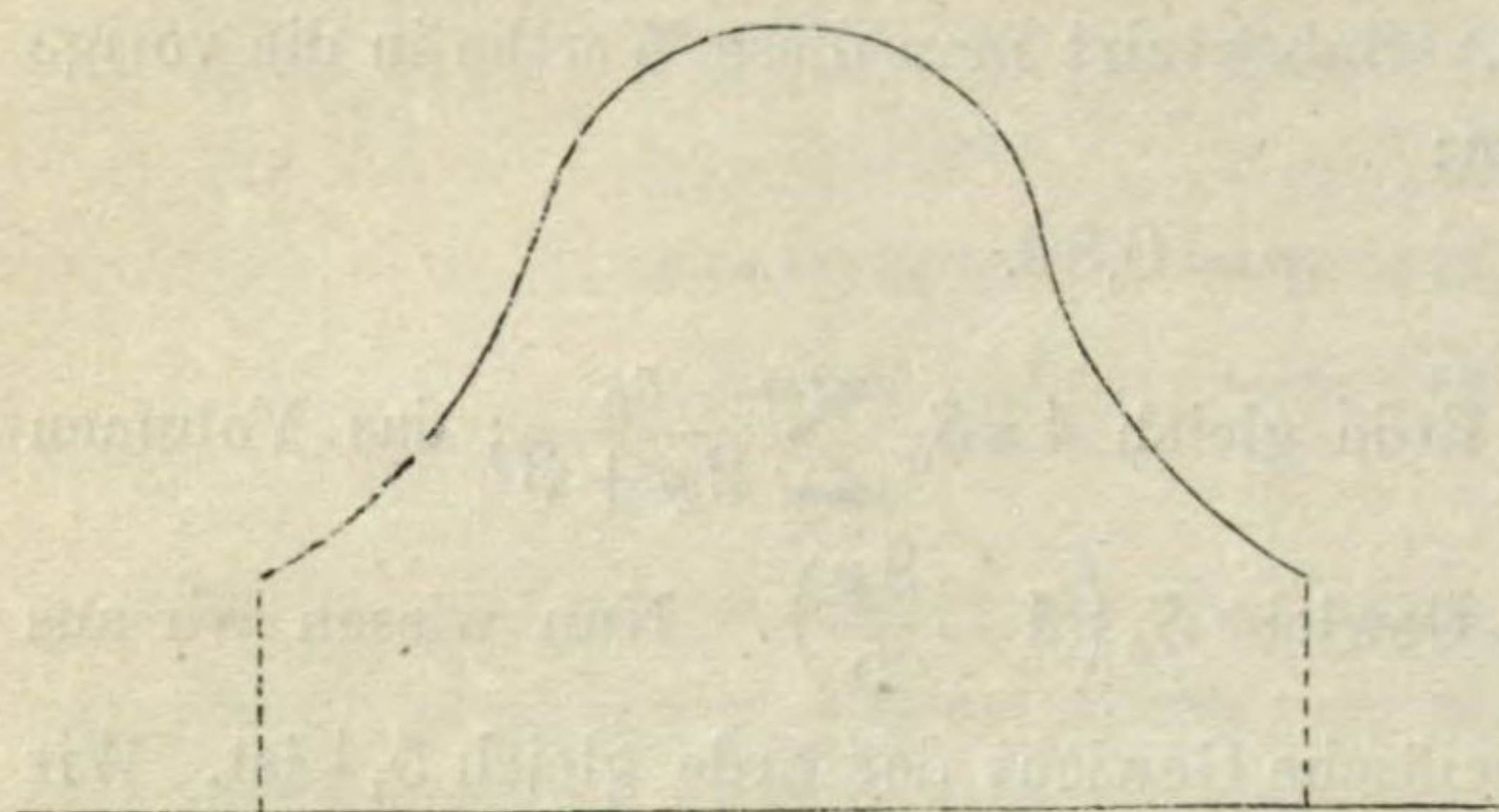
$$S_0 (1 + s_1 + s_2) = 2,7.$$

Nun lässt sich über das Zahlenverhältniss $s_1 : s_2$ nach den bisherigen Ergebnissen schon eine Vermuthung aufstellen. Wäre das Gesetz der Dichte parabolisch, d. h. hätte es die Form $s = S_0 (1 - pr^2)$, so ergäbe sich aus der mittlern Dichte 5,6 und der Dichte 2,7 an der Oberfläche eine weit geringere Dichte im Centrum, als im vorigen Beispiel; es müsste also die Abplattung grösser sein, als sie in Wirklichkeit ist, weil ja die Abplattung um so grösser ist, je mehr Masse sich an der Oberfläche befindet. Aus dieser Erwägung ergiebt sich, dass s die Form haben muss:

$$s = S_0 (1 - pr^2 + qr^4).$$

Durch Versuche findet man, dass durch $q = \frac{1}{3}p$ die gegebenen Bedingungen nahe erfüllt werden; diese Annahme giebt:

Fig. 5.



$$p = 1,16,$$

$$q = 0,39,$$

$$S_0 = 11,7.$$

Die graphische Darstellung der Dichte nach dieser Formel giebt eine glockenähnliche Figur (vgl. Fig. 5).

§ 36.

Die Potentialfunction und Gestalt der Erde aus den an der Oberfläche wirkenden Kräften berechnet. Das Clairaut'sche Theorem.

Wir wollen nun die oben entwickelten allgemeinen Sätze über die Kugelfunctionen zur Lösung einiger Probleme über die Gestalt und Beschaffenheit der Erde benutzen.

Nach § 34 a) besteht für die Oberflächen des gleichen Druckes, also auch für die Meeresfläche die Gleichung:

$$V = C + \frac{v^2 R^2}{2} (c'^2 - 1).$$

Setzt man den Radius der Erde gleich 1, die Masse gleich M , so ist $v^2 = Q M$; da ferner $K_2 = c'^2 - \frac{1}{3}$ ist, so hat man an der Meeresfläche

$$V' = M \left(C + \frac{Q K_2}{2} \right).$$

Spannt man nun eine Kugel mit dem Radius des Aequators, der gleich 1 gesetzt wird, um die ganze Erde, so dass sie alle Massen einhüllt, und ist der Radius der Meeresfläche:

$$\varrho = 1 + \delta = 1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \dots,$$

wobei $\delta_1 \delta_2 \dots$ die verschiedenen Kugelfunctionen bedeuten, in welche sich δ auflösen lässt, so ist auf der Kugelfläche vom Radius 1

$$V'' = M \left(C + \frac{Q K_2}{2} \right) - \frac{dV}{dr} \delta$$

(wenn man alle höheren Potenzen von δ und Q vernachlässigt). Nun ist $\frac{dV}{dr}$ an der Oberfläche gleich $-M$, also:

$$V'' = M \left(C + \frac{Q K_2}{2} + \delta \right).$$

Nach den oben entwickelten Sätzen über die Kugelfunctionen hat man daher für die Potentialfunction ausserhalb der Erde:

$$a) \quad V = M \left(\frac{1}{r} + \frac{\frac{1}{2} Q K_2 + \delta_2}{r^3} + \frac{\delta_3}{r^4} + \frac{\delta_4}{r^5} \dots \right).$$

δ_1 ist gleich Null, wenn man den Schwerpunkt des Systems als Mittelpunkt des Coordinatensystems ansieht (§ 21).

Ist die Erde ein Ellipsoid mit der Abplattung A , so hat man:

$$c = 1 - A c'^2,$$

also $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = -A K_2$, $\delta_3 = 0 \dots$, somit:

$$b) \quad V = M \left[\frac{1}{r} + \frac{K_2}{r^3} \left(\frac{Q}{2} - A \right) \right].$$

Man kann auch aus den an der Erdoberfläche wirkenden Schwerkräften die Gestalt derselben bestimmen. Aus a) hat man nämlich für die an der Oberfläche wirkende Schwerkraft in Verbindung mit der Centrifugalkraft:

$$F = M \left[\frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^4} \left(\frac{1}{2} Q K_2 + \delta_2 \right) + \frac{4 \delta_3}{r^5} \dots + Q r (c'^2 - 1) \right].$$

Bezeichnet man die Höhe über der Meeresfläche in Theilen des Radius ausgedrückt durch h , so hat man schliesslich, da man für einen Punkt in der Höhe h über der Meeresfläche $r = 1 + \delta + h$ zu setzen hat:

$$F = M \left(1 - 2h + \delta_2 + 2\delta_3 + 3\delta_4 \dots + \frac{5}{2} Q K_2 \right).$$

Diese Formel giebt ein Mittel an die Hand, aus Pendelbeobachtungen die Gestalt der Erde zu bestimmen. Ist die Erde ein Rotationsellipsoid mit der Abplattung A und bezeichnet man die Schwere am Pol und Aequator durch F_p und F_a , so hat man die elegante Formel:

$$c) \quad A = \frac{5}{2} Q - \frac{F_p - F_a}{F},$$

welche unter dem Namen das Clairaut'sche Theorem bekannt ist.

Nachstehend folgt eine Tabelle der genauesten Pendelversuche, wobei die Länge des Pendels in englischen Zollen gegeben und überall auf die Meeresfläche reducirt ist.

O r t.	B r e i t e.	L ä n g e des Sekunden- pendels.	Beobachtete Länge — berechnete Länge.	Differenz in Sekunden.
Spitzbergen	79° 50' N.	39.21469	+ 0.00388	+ 4.3
Melville-Insel	74.47	2070	+ 380	+ 4.2
Grönland	74.32	20335	+ 55	+ 0.6
Port Bowen	73.14	20419	+ 381	+ 4.2
Hammerfest	70.40	19475	— 34	— 0.4
Drontheim	63.26	17456	— 243	— 2.7
Unst	60.45	17162	+ 240	+ 2.7
Stockholm	59.21	16541	+ 042	+ 0.5
Portsoy	57.41	16159	+ 178	+ 2.0
Leith	55.59	15546	+ 110	+ 1.2
Königsberg	54.42	15072	+ 55	+ 0.6
Clifton	53.28	14600	— 7	— 0.1
Arbury Hill	52.13	14250	+ 64	+ 0.7
London	51.31	13929	— 19	— 0.2
Greenwich	51.29	13983	+ 45	+ 0.5
Dünkirchen	51.02	13773	— 11	— 0.1
Insel Wight	50.37	13614	— 27	— 0.3
Paris	48.50	12851	— 176	— 1.9
Clermont	45.47	11615	— 356	— 3.9
Mailand	45.28	11603	— 250	— 2.8
Padua	45.24	11896	+ 65	+ 0.7
Fiume	45.19	11788	— 13	— 0.1
Bordeaux	44.50	11296	— 337	— 3.7
Figeac	44.37	11215	— 342	— 3.8
Toulon	43.07	10952	— 82	— 0.1
Barcelona	41.23	10432	+ 3	+ 0.0
New-York	40.43	10120	— 79	— 0.9
Formentera	38.40	09510	+ 14	+ 0.2
Lipari	38.29	09828	+ 396	+ 4.4
Californien	21.30	03829	— 538	— 6.0
Sandwich-Inseln	20.52	04690	+ 471	+ 5.2
Jamaica	17.56	03503	— 73	— 0.8
Marianen	13.28	03379	+ 616	+ 6.8
Madras	13.04	02630	— 70	— 0.8
Trinidad	10.39	01888	— 474	— 5.2
Sierra Leone	8.30	01997	— 117	— 1.3
Galopagos-Inseln	0.32	01717	+ 38	+ 0.4
St. Thomas	0.25	02074	+ 395	+ 4.4
Pulo Gaun Lout	0.02	02126	+ 449	+ 5.0
Rawak	0.02 S.	01433	— 244	— 2.7
Maranham	2.32	01213	— 504	— 5.6

O r t.	L ä n g e.	L ä n g e des Sekunden- pendels.	Beobachtete Länge — berechnete Länge.	Differenz in Sekunden.
Ascension	7° 55' S.	39.02363	+ 0.00305	+ 3.4
Bahia	12.59	02433	— 255	— 2.8
Isle de France	20.10	04684	+ 626	+ 7.0
Rio de Janeiro	22.55	04350	— 363	— 4.0
Paramatta	33.49	07452	— 428	— 4.7
Port Jackson	33.52	07919	+ 23	+ 0.3
Cap der guten Hoffnung	33.55	07800	— 112	— 1.2
Maluinen-Inseln	51.35	13781	— 191	— 2.1

Aus diesen Versuchen ergibt sich für die mittlere Länge des Sekundenpendels:

$$l = 39,01677 + 0,20027 \sin^2 (\text{Breite}).$$

Das Verhältniss der Schwungkraft zur Schwerkraft vom Aequator ist gleich 0,0034672. Der Meter ist gleich 39,37079 englische Zoll.

Da obige Formel bis auf Fehler von der Ordnung des Quadrats von Q die Länge des Sekundenpendels darstellt, so sehen wir, dass die Meeresfläche bis auf Unebenheiten zweiter Ordnung in der That ein Rotationsellipsoid darstellt. Wäre die Erde, wie schon vermuthet wurde, ein dreiachsiges Ellipsoid, so müsste die Schwere auf demselben Parallelkreise zwei ausgesprochene Maxima und Minima nachweisen, was aber nicht der Fall ist.

Die Abplattung ergibt sich aus obigen Angaben gleich 0,003535 = 1 : 283.

Da sich die Wissenschaft gegenwärtig wieder sehr lebhaft mit dem Problem beschäftigt, die wahre Gestalt der Erde zu bestimmen, so mögen hier noch einige Bemerkungen über diesen Gegenstand Platz finden.

Man versteht unter der Gestalt der Erde diejenige Gestalt, welche, abgesehen von den Stürmen, sowie von Ebbe und Fluth, das Meer annehmen würde, wenn dasselbe durch ein Netz von unterirdischen Canälen unter den Continenten sich über die ganze Erde verbreiten könnte. Nach den gegebenen Erörterungen versteht man daher unter der Gestalt der Erde diejenige Fläche in unmittelbarer Nähe der Meeresfläche, für welche V constant ist. Auf dem festen Lande findet man die Gestalt der Oberfläche oder Niveaufäche durch das Nivelliren, indem das Nivellirinstrument die Tangenten der Niveaufächen angiebt. Liegen zwei

nahe Punkte, a und b , nicht in derselben Niveaufläche, so sagt man, ihre Höhe sei verschieden und nennt die Normale zwischen der Niveaufläche des Punktes b und der des Punktes a die Höhendifferenz beider Punkte. Hat man eine Reihe von Punkten, deren Höhendifferenzen man in dieser Weise bestimmt, so erhält man nach der gewöhnlichen Anschauung die Höhendifferenz des letzten und ersten Punktes, wenn man alle einzelnen Höhendifferenzen addirt. Diese Anschauung ist jedoch nicht ganz correct. Denn soll die Höhendifferenz zwischen zwei Punkten eine bestimmte Grösse sein, so darf diese nicht von dem Wege abhängen, auf dem man zu ihr gelangt. Nun ist es aber durchaus nicht gleichgiltig, auf welchem Wege wir von einem Punkte zu einem entfernten andern Punkte nivelliren, indem wir selbst abgesehen von Beobachtungsfehlern auf den verschiedenen Wegen, auf welchen wir von einem bestimmten Punkte zu einem bestimmten andern Punkte nivelliren, auch verschiedene Werthe für die Höhendifferenz dieser Punkte erhalten. Ein Beispiel wird dies klar machen.

Wir denken uns, dass aus der Nordsee eine senkrechte Felswand von 1000 Fuss aufsteige und sich horizontal als Plateau bis zum adriatischen Meere fortsetze. Nach gewöhnlicher Auffassung würde dann diese Felswand ebenfalls wieder 1000 Fuss nach dem adriatischen Meere abfallen. Bei näherer Betrachtung werden wir aber finden, dass dies nicht der Fall sein kann. Denn da die Schwere vom Pol zum Aequator abnimmt, so ist diejenige Niveaufläche, welche an der Nordsee sich 1000 Fuss über dem Meere erhebt, an dem adriatischen Meere etwas mehr als 1000 Fuss, etwa 1001 Fuss vom Meere entfernt. Sucht man nun die Höhe dieses überall gleich hohen Plateaus über der Nordsee nach der Methode des gewöhnlichen Nivellements, so findet man 1000 Fuss; sucht man dessen Höhe über dem adriatischen Meere, so findet man 1001 Fuss, und nivellirt man vom adriatischen Meere längs der Meeresküste wieder an die Nordsee zurück, nachdem man vorher von der Nordsee über das Plateau nach dem adriatischen Meere nivellirt hatte, so erhält man den Widerspruch, dass die Nordsee einen Fuss unter ihrem eigenen Niveau liegt. Dieses Beispiel zeigt klar, dass die gewöhnliche Rechnungsmethode beim Nivellement auf einem unrichtigen Princip beruht und dass man die Höhe oder das Niveau eines Ortes in der allein richtigen Weise durch die Potentialfunction der Erde an diesem Orte bestimmt, dass man somit die Höhendifferenz zwischen zwei Orten in der allein richtigen Weise durch die Arbeit ausdrückt, welche man braucht, um eine bestimmte Masseneinheit von dem einen Orte zum andern zu heben.

Will man also die Höhendifferenz zweier Punkte durch ein Nivellement in correcter Weise bestimmen, so muss man nicht bloß die Höhendifferenzen zwischen den einzelnen Punkten des Nivellements, sondern auch die Schwerkraft an diesen Punkten messen und hat für die Höhendifferenz

$$\sum \Delta h_n S_n,$$

wenn man mit Δh_n die einzelnen Höhendifferenzen und mit S_n die Schwerkraft an den einzelnen Punkten bezeichnet. Will man ein mathematisch genaues Resultat, so muss man die Zwischenräume der einzelnen Punkte des Nivellements verschwindend klein werden lassen und hat als Höhendifferenz:

$$\int dn \cdot \frac{dV}{dn} = V_2 - V_1.$$

§ 37.

Präcession und Nutation der Erdachse.

Für die Potentialfunction der Erde haben wir im vorigen Paragraphen erhalten:

$$V = M \left[\frac{1}{r} + \frac{K_2}{r^3} \left(\frac{Q}{2} - A \right) \right].$$

Die aus dieser Potentialfunction resultirende Kraft geht ihrer Richtung nach nicht durch den Schwerpunkt der Erde, sie bewirkt also eine Rotation, deren Momente sich leicht berechnen lassen. Setzt man nämlich

$$M \left(\frac{Q}{2} - A \right) = -D,$$

so hat man in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt:

$$V = \frac{M}{r} - D \left(\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{3r^3} \right).$$

Befindet sich in der Entfernung r von der Erde die Masse m , so sind die von der Erde auf diese Masse wirkenden Kräfte

$$m \frac{dV}{dx}, \quad m \frac{dV}{dy}, \quad m \frac{dV}{dz},$$

und die von dieser Masse auf die Erde wirkenden Kräfte sind die gleichen, nur mit negativem Vorzeichen.

Erinnert man sich an das, was oben in § 9 vorgetragen wurde, und bezeichnet man die Drehungsmomente um die festen Coordinaten-

achsen mit P, Q, R , so hat man (die Drehung von rechts nach links als positive Drehung vorausgesetzt):

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= m z \frac{dV}{dy} - m y \frac{dV}{dz}, \\ \frac{dQ}{dt} &= m x \frac{dV}{dz} - m z \frac{dV}{dx}, \\ \frac{dR}{dt} &= m y \frac{dV}{dx} - m x \frac{dV}{dy}.\end{aligned}$$

Nun ist V eine Function von r und z ; es ist also:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= \frac{x}{r} \frac{dV}{dr}, & \frac{dV}{dy} &= \frac{y}{r} \frac{dV}{dr}, \\ \frac{dV}{dz} &= \frac{z}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{dV}{dz}.\end{aligned}$$

Man hat daher sehr leicht:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= 2m D \frac{y' z'}{r^3}, & \frac{dQ}{dt} &= -2m D \frac{x' z'}{r^3}, \\ \frac{dR}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Z -Achse die Drehungsachse ist und x', y', z' die Cosinus der Winkel bedeuten, welche r mit den festen Achsen macht. Man hat daher für einen Zeitraum, welcher so kurz ist, dass man während desselben die Erdachse als feststehend ansehen darf:

$$\begin{aligned}\Delta P &= 2m D \int \frac{y' z'}{r^3} dt, \\ \Delta Q &= -2m D \int \frac{x' z'}{r^3} dt, \\ R &= v C,\end{aligned}$$

wenn v die Winkelgeschwindigkeit der Rotation und C das Trägheitsmoment um die Z -Achse bedeutet. Ist die halbe grosse Achse der Ellipse, welche m und M um einander beschreiben, gleich a , die Excentricität gleich e , so ist die halbe kleine Achse $a \sqrt{1 - e^2}$ und der Parameter $a (1 - e^2)$, ferner die Oberfläche der Ellipse $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$. Nimmt man ferner als Zeiteinheit die Umlaufszeit der Körper M und m , so beschreibt der Radius Vector während der Zeit dt den Flächenraum

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot dt = \frac{r^2 d\varphi'}{2}.$$

Es ist also:

$$\frac{dt}{r^3} = \frac{d\varphi'}{2\pi a^2 r \sqrt{1-e^2}}.$$

Ferner ist nach den als bekannt vorausgesetzten Regeln der Planetenbewegung

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi' - \omega)},$$

wobei ω die Länge des Perihels bedeutet; es ist also:

$$\frac{dt}{r^3} = \frac{d\varphi' [1+e\cos(\varphi' - \omega)]}{2\pi a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir haben jetzt noch die Massen M und m der gewählten Zeiteinheit entsprechend auszudrücken. Würden die Körper M und m einen Kreis vom Radius a beschreiben, so würden sie hierzu die Zeiteinheit brauchen, da ja die Umlaufszeit nur von der grossen Achse abhängt. Die Winkelgeschwindigkeit wäre 2π und somit die Centrifugalkraft gleich $a(2\pi)^2$. Diese ist aber auch gleich $\frac{M+m}{a^2}$; es ist also $M+m = a^3(2\pi)^2$ und schliesslich:

$$\frac{dt}{r^3} = \frac{2\pi d\varphi' [1+e\cos(\varphi' - \omega)]}{(M+m)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Zeiteinheit haben wir also:

$$\Delta P = \frac{4\pi m D}{(M+m)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} y' z' [1+e\cos(\varphi' - \omega)] d\varphi',$$

$$\Delta Q = \frac{-4\pi \dot{m} D}{(M+m)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} x' z' [1+e\cos(\varphi' - \omega)] d\varphi'.$$

Durchschneiden sich der Aequator des Körpers M und die Bahn der Körper M und m in der X -Achse und ist i die Neigung der Bahn, so hat man:

$$x' = \cos \varphi', \quad y' = \sin \varphi' \cos i, \quad z' = \sin \varphi' \sin i.$$

Wenn man endlich diese Werthe substituirt und integrirt, so erhält man nach einem ganzen Umlauf:

$$\Delta P = \frac{4\pi^2 m D \sin i \cos i}{(M+m)(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Delta Q = 0.$$

Die Achse des Rotationsmomentes bewegt sich also stets in der Richtung der Knotenlinie der Bahn, beschreibt also nach und nach in rückläufiger Richtung einen Kreiskegel um die Achse der Bahn, wenn diese fest bleibt. Der kleine Winkel, um welchen das Moment sich verschiebt, ist

$$\frac{\Delta P}{R} = \frac{4\pi^2 m D \sin i \cos i}{v C (M + m) (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Macht der Körper M während der Dauer eines Umlaufs u Umdrehungen, so ist $v = 2\pi u$ und der kleine Winkel ist:

$$\frac{2\pi m D \sin i \cos i}{u C (M + m) (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies ist der kleine Winkel, um den sich die Achse des Drehungsmomentes verschiebt. Nun ist der Himmelspol die momentane Achse der Erde und diese fällt, wie die Erfahrung zeigt, immer sehr nahe mit der Hauptachse zusammen. Sind die Cosinus des Winkels, welchen die momentane Achse mit der Hauptachse macht, gleich α, β, γ , so sind die Projectionen des Rotationsmomentes:

$$\alpha v A, \quad \beta v B, \quad \gamma v C.$$

Sind nun α und β sehr klein, so sind die Projectionen der Richtung des Rotationsmomentes:

$$\alpha \frac{A}{C}, \quad \beta \frac{B}{C}, \quad \gamma.$$

Der Himmelspol fällt also immer bis auf eine unmerkliche Grösse mit der Achse des Rotationsmomentes zusammen. Es bleibt jetzt nur noch zu beweisen, dass sich die momentane Achse nie von der Hauptachse merklich entfernen kann.

Wir haben in § 12 als Fundamentalgleichungen für die Rotation gefunden:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} + qr(C - B) - \frac{dP}{dt} = 0, \\ B \frac{dq}{dt} - pr(C - A) - \frac{dQ}{dt} = 0, \\ C \frac{dr}{dt} + pq(B - A) - \frac{dR}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

Ist nun die momentane Achse ganz nahe bei der Hauptachse, so sind p und q ganz kleine Werthe, deren Product sich vernachlässigen lässt,

und da auch $\frac{dR}{dt} = 0$ ist, so können wir $r = v$ als constant ansehen.

Die obigen drei Gleichungen reduciren sich daher auf die beiden:

$$b) \quad \begin{cases} Ap' + qv(C - B) - P' = 0, \\ Bq' - pv(C - A) - Q' = 0. \end{cases}$$

Differenzirt man die zweite Gleichung und eliminirt aus der ersten p , sowie in gleicher Weise aus der zweiten q , so hat man:

$$\begin{aligned} q'' + qv^2 \frac{(C - B)(C - A)}{AB} &= \frac{Q''}{B} + \frac{P'v(C - A)}{AB}, \\ p'' + qv^2 \frac{(C - A)(C - B)}{AB} &= \frac{P''}{A} - \frac{Q'v(C - B)}{AB}. \end{aligned}$$

Nun ist, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben:

$$\begin{aligned} P' &= \text{Const.} \sin i \cos i \sin^2 \varphi' [1 + e \cos(\varphi' - \omega)] \frac{d\varphi'}{dt}, \\ Q' &= -\text{Const.} \cos i \sin \varphi' \cos \varphi' [1 + e \cos(\varphi' - \omega)] \frac{d\varphi'}{dt}. \end{aligned}$$

Wäre $e = 0$, so wäre φ' in der Zeiteinheit gleich 2π und $\frac{d\varphi'}{dt} = 2\pi$; wir hätten somit:

$$\begin{aligned} P' &= \pi \text{Const.} \sin i \cos i (1 - \cos 4\pi t), \\ Q' &= -\pi \text{Const.} \cos i \sin 4\pi t. \end{aligned}$$

Ist die Bahn elliptisch, so sind die Ausdrücke P' und Q' gleichfalls periodisch und lauten:

$$\begin{aligned} P' &= \pi \text{Const.} \sin i \cos i (1 - \cos 4\pi t + c_1 \cos 2\pi t + c_2 \sin 2\pi t \dots), \\ Q' &= -\pi \text{Const.} \cos i (\sin 4\pi t + c'_1 \sin 2\pi t + c'_2 \cos 2\pi t \dots), \end{aligned}$$

wobei die Coefficienten c mit den Potenzen der Excentricität, somit sehr rasch convergiren.

Nun ist das Integral der Differenzialgleichung

$$q'' + \alpha^2 q = b \sin(\beta t + \gamma)$$

gleich:

$$q = c_1 \sin(\alpha t + c_2) + \frac{b \sin(\beta t + \gamma)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

wie man sich durch Differenziation leicht überzeugt. Die Ausdrücke $c_1 c_2$ sind die Integrationsconstanten. Ist $\alpha = \beta$, so geht das Integral über in

$$q = c_1 \sin(\alpha t + c_2) - \frac{bt \cos(\alpha t + \gamma)}{2\alpha}.$$

Nun darf man nicht übersehen, dass sich die Ausdrücke P' , Q' auf die im Raume festen Achsen beziehen, während sich die Ausdrücke in den Gleichungen a) auf die im rotirenden Körper festen Achsen beziehen. Nun fällt zwar die im Raume feste Z -Achse der Voraussetzung nach mit der im Körper festen Z' -Achse zusammen, weil wir angenommen haben, dass sich der rotirende Körper ursprünglich um die Hauptachse Z' drehe und die störende Kraft so gering sei, dass sie für die Dauer der Zeiteinheit keine merkliche Wirkung hervorbringe. Das ist aber nicht mehr der Fall mit den im Körper festen Achsen X' und Y' ; diese fallen mit den im Raume festen Achsen nicht zusammen, sondern rotiren mit der Geschwindigkeit $2\pi u$. Nun ist der Winkel, welchen die Achsen X' und Y' mit den Achsen X und Y machen, gleich $2\pi u t$, und bezeichnet man das auf die festen Achsen bezogene P' und Q' durch P'_1 , Q'_1 ; so hat man:

$$P' = P'_1 \cos 2\pi u t + Q'_1 \sin 2\pi u t,$$

$$Q' = Q'_1 \cos 2\pi u t - P'_1 \sin 2\pi u t.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\pi \text{ Const. } \sin i \cos i = V,$$

$$\pi \text{ Const. } \cos i = W,$$

so hat man für eine kreisförmige Bahn:

$$P' = V \cos 2\pi u t + \frac{W-V}{2} \cos 2\pi (u+2)t - \frac{W+V}{2} \cos 2\pi (u-2)t,$$

$$Q' = V \sin 2\pi u t + \frac{W-V}{2} \sin 2\pi (u+2)t - \frac{W+V}{2} \sin 2\pi (u-2)t.$$

Für die elliptische Bahn muss man noch Glieder hinzufügen, welche

$$(\sin \text{ oder } \cos) [2\pi (u \pm n) t]$$

heissen und mit den Potenzen der Excentricität multiplicirt sind.

Entwickelt man nun die Differenzialgleichungen für p und q , so werden diese von der Form:

$$q'' + \alpha^2 q = a \cos 2\pi u t + b \cos 2\pi (u+2)t + c \cos 2\pi (u-2)t,$$

$$p'' + \alpha^2 p = d \sin 2\pi u t + e \sin 2\pi (u+2)t + f \sin 2\pi (u-2)t,$$

und man erhält:

$$q = c_1 \sin \alpha t + c_2 \cos \alpha t + \frac{d \cos 2\pi u t}{\alpha^2 - (2\pi u)^2} \dots,$$

$$p = c_3 \sin \alpha t + c_4 \cos \alpha t + \frac{d \sin 2\pi u t}{\alpha^2 - (2\pi u)^2} \dots$$

Die vier unbestimmten Coefficienten können wir mit Hülfe der beiden Gleichungen b), sowie unter der weitem Annahme, dass p und q für den Anfang gleich Null sein sollen, bestimmen. Nun ist

$$\alpha^2 = (2\pi u)^2 \frac{(C-B)(C-A)}{AB},$$

und für die Erde, wie wir weiter unten finden werden:

$$\frac{C-A}{B} = \frac{C-B}{A} = \frac{1}{296},$$

also ohne merklichen Fehler:

$$\alpha^2 - (2\pi u)^2 = - (2\pi u)^2.$$

Ferner ist:

$$a = - \frac{2\pi u V}{B} = - \frac{2\pi^2 u \sin i \cos i \text{ Const.}}{B},$$

oder wenn man für *Const.* den betreffenden Werth einsetzt:

$$a = - \frac{(2\pi)^3 u m D \sin i \cos i}{(M+m) B}.$$

Wie wir ebenfalls weiter unten sehen werden, ist

$$\frac{D}{B} = \frac{1}{198}.$$

Für die Wirkung der Sonne haben wir daher, wenn wir c_1 und c_2 gleich Null setzen:

$$q = \frac{2\pi \sin i \cos i}{u \cdot 296} \cos 2\pi u t.$$

Der kleine Winkel, welcher q entspricht, ist $\frac{q}{v} = \frac{q}{2\pi u}$, also gleich:

$$\frac{\sin i \cos i}{366^2 \cdot 296} \cos 2\pi u t,$$

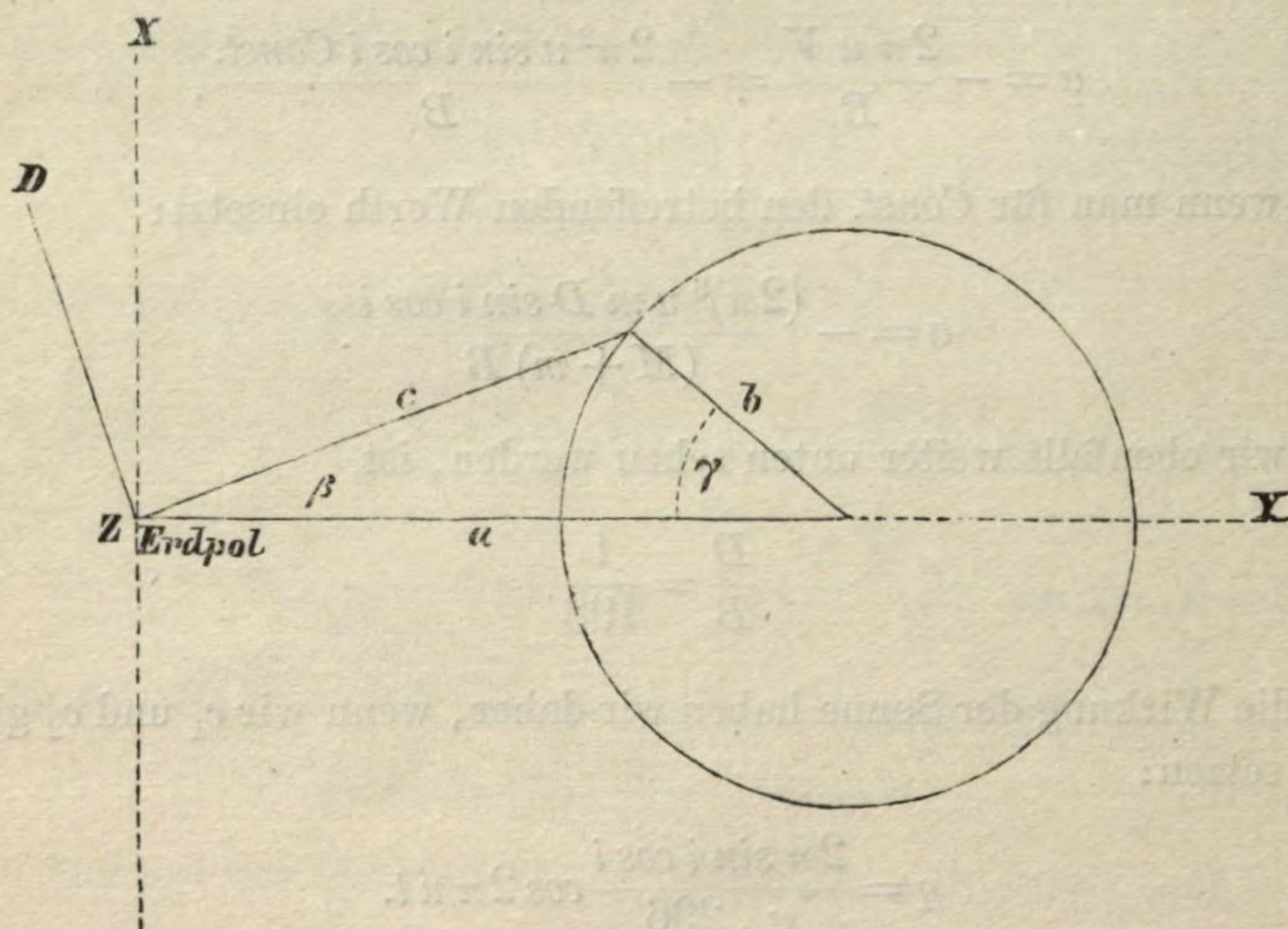
mithin so klein, dass er für die Wahrnehmung völlig verschwindet.

§ 38.

Fortsetzung und Berechnung der Resultate.

Will man die Bewegung der Erdachse berechnen, soweit sie durch die Sonne verursacht wird, so begegnet man keinen Schwierigkeiten, da die Ekliptik wenigstens für eine grosse Reihe von Jahren als feststehend angesehen werden kann. Verwickelter wird die Rechnung für den Mond, indem die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik veränderlich ist und die Knotenlinie, sowie das Perigeum stets im Kreise herumlaufen. Letztere Ungleichheit hat für unsere Rechnung keine Bedeutung, weil die Lage des Perigeums, wie die Formeln des vorigen Paragraphen zeigen, auf die Bewegung der Erdachse nach Verlauf eines Umganges keinen Einfluss hat. In Folge des Umlaufs der Knotenlinie beschreibt die Achse der Mondbahn eine Kegelfläche um die Achse der Ekliptik, die man als einen Kreiskegel von der Oeffnung der mittleren Inclination der Mondbahn betrachten darf, ohne einen für die Rechnung störenden Fehler zu begehen. (Fig. 6.) Nun verändert sich

Fig. 6.



γ so langsam, dass man β für einen Monat als constant ansehen darf; es ist also die Bewegung der Erdachse in der Richtung ZD in einem siderischen Monat gleich:

$$a) \quad \frac{2\pi m D \sin c \cos c}{u C (M + m) (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} = F' \sin c \cos c.$$

Die Bewegung in der Richtung der X -Achse:

$$F \sin c \cos c \cos \beta,$$

und in der Richtung der Y -Achse:

$$F \sin c \cos c \sin \beta,$$

wobei, um die Bedeutung der einzelnen Zeichen noch einmal ins Gedächtniss zu rufen, a die Neigung der Ekliptik und b die mittlere Neigung der Mondbahn bedeutet. Nun ist nach der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos c = \sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b,$$

$$\cotg \beta = \frac{\cos b \sin a - \cos a \sin b \cos \gamma}{\sin b \sin \gamma},$$

$$\sin \beta = \frac{\cos b \sin a - \cos a \sin b \cos \gamma}{\sin c}.$$

Es ist also die monatliche Bewegung in der Richtung der Y -Achse

$$F \sin b \sin \gamma (\sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b),$$

und in der Richtung der X -Achse gleich:

$$F (\cos b \sin a - \cos a \sin b \cos \gamma) (\sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b).$$

Ist die Zeit des Umlaufs der Knotenlinie in siderischen Monaten ausgedrückt, gleich N , so ist $\gamma = \frac{2\pi t}{N}$. Setzt man nun einen Monat gleich

$dt = \frac{N d\gamma}{2\pi}$ und bezeichnet man die Bewegungen der Erdachse in den beiden Richtungen durch x und y , so hat man:

$$dx = \frac{FN}{2\pi} (\cos b \sin a - \cos a \sin b \cos \gamma) (\sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b) d\gamma,$$

$$dy = \frac{FN}{2\pi} (\sin a \sin b \cos \gamma + \cos a \cos b) \sin b \sin \gamma d\gamma.$$

Wenn man integrirt, erhält man für einen ganzen Umlauf der Knotenlinie:

$$\Delta x = FN \sin a \cos a \left(\frac{2 - 3 \sin^2 b}{2} \right).$$

Ferner erhält man allgemein integrirt:

$$y = \frac{FN}{2\pi} \left(\frac{\sin a \sin^2 b \sin^2 \gamma}{2} - \cos a \sin b \cos b \cos \gamma \right).$$

Ist y ein Maximum oder Minimum, so ist $\sin \gamma = 0$, also $\cos \gamma = \pm 1$; es ist daher die ganze Nutation gleich:

$$\frac{F N \cos a \sin 2b}{2\pi}.$$

Substituirt man für F den Ausdruck aus a), so hat man für die Nutation, wenn man zugleich die Masse des Mondes mit m und die Anzahl der Umdrehungen der Erde während eines siderischen Monats mit u_2 bezeichnet und die Excentricität vernachlässigt:

$$b) \quad \frac{m D N \cos a \sin 2b}{u_2 C (M + m)}.$$

Die durch den Mond hervorgebrachte Bewegung der Erdachse in der Richtung X ist:

$$\frac{\pi m D N \sin a \cos a (2 - 3 \sin^2 b)}{u_2 C (M + m)}$$

während der Zeit des Knotenumlaufes, und während der Zeit des Jahres, wenn man die Anzahl der Umdrehungen während eines Jahres mit u_1 bezeichnet:

$$\frac{\pi m u_1 D \sin a \cos a (2 - 3 \sin^2 b)}{u_2^2 C (M + m)}.$$

Die durch die Sonne hervorgebrachte jährliche Bewegung ist, die Masse der Sonne gleich s gesetzt:

$$\frac{2\pi s D \sin a \cos a}{u_1 C (M + s)}.$$

Nun ist die Präcession gleich der ganzen jährlichen Bewegung der Erdachse in der Richtung X dividirt durch $\sin a$; sie ist also gleich:

$$c) \quad \frac{\pi D \cos a}{C} \left[\frac{2}{u_1} + \frac{m}{M + m} \cdot \frac{u_1}{u_2^2} (2 - 3 \sin^2 b) \right].$$

Nun ist:

$$u_1 = 366,26, \quad u_2 = 27,356, \quad N = 18,616 \text{ Jahre,}$$

$$a = 23^\circ 28', \quad b = 5^\circ 9',$$

$$\text{Präcession} = 0,000242 = p,$$

$$\text{Nutation} = 0,000087 = n$$

in Theilen des Radius ausgedrückt. Man erhält also schliesslich die zwei Gleichungen:

$$p = \alpha \frac{D}{C} + \beta \frac{m}{M+m} \cdot \frac{D}{C},$$

$$n = \gamma \frac{D}{C} \cdot \frac{m}{M+m},$$

und hieraus

$$M = 86m,$$

d. h. die Masse der Erde ist 86 mal so gross, als die Masse des Mondes;
ferner

$$C = 198 D = 99 M (2A - Q) \text{ (vergl. § 37).}$$

§ 39.

Das Trägheitsmoment der Erde aus Präcession und Nutation berechnet.

Ist A und Q bekannt, so können wir also das Trägheitsmoment der Erde berechnen. Nehmen wir z. B. A und Q aus den Angaben über die Pendelversuche in § 36, so erhalten wir:

$$C = 0,35 M.$$

Wäre die Abplattung, wie nach den Gradmessungen gewöhnlich angenommen wird, gleich $1 : 299$, so hätte man:

$$C = 0,32 M.$$

Als Mittelwerth kann man annehmen:

$$C = \frac{1}{3} M.$$

Wäre die Erde überall von gleicher Dichte, so wäre:

$$C = \int_0^1 (x'^2 + y'^2) \varrho^4 d\varrho d\omega = \frac{8\pi}{15},$$

$$M = \frac{4\pi}{3},$$

wir hätten also $C = 0,4 M$. Da aber C beträchtlich kleiner ist, als es sein würde, wenn die Erde überall gleiche Dichte hätte, so ergibt sich daraus mit Evidenz, dass die Dichte im Innern zunehmen muss, und dieser Schluss ist ganz unabhängig von der Voraussetzung, dass die Erde im Innern flüssig sei. Ist das Gesetz der Dichte

$$s = S_0 (1 - pr^2),$$

so hat man:

$$C = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{p}{7} \right), \quad M = \frac{4\pi}{3} \left(1 - \frac{3p}{5} \right).$$

Setzt man nun $3C = M$, so erhält man:

$$p = \frac{7}{9}.$$

Hiernach wäre die Dichte im Innern $4\frac{1}{2}$ mal so gross, als an der Oberfläche. Nimmt man noch das specifische Gewicht der Erde 5,6 zu Hülfe, so erhält man für die Dichte im Centrum 10,5 und an der Oberfläche 2,3.

§ 40.

Die Abplattung der Erde aus Präcession und Nutation unter der Voraussetzung der Flüssigkeit der innern Erdmasse berechnet.

Aus § 21 erhalten wir, wenn wir $\Sigma x^2 m = \Sigma y^2 m$ setzen:

$$V = \frac{M}{r} - \frac{3}{2r^3} (c'^2 - \frac{1}{3}) \Sigma (x^2 - z^2) m.$$

Wenn wir dieses Resultat mit dem in § 37 vergleichen, so sehen wir, dass

$$D = \frac{3}{2} \Sigma (x^2 - z^2) m$$

sein muss, und da wir gefunden haben $198 D = C = 2 \Sigma x^2 m$, so erhalten wir aus Präcession und Nutation:

$$a) \quad 148 = \Sigma x^2 m : \Sigma (x^2 - z^2) m = C : 2 (C - B).$$

Sind nun, wie wir oben bei einer im Gleichgewicht befindlichen flüssigen Masse gefunden haben, die Schichten gleicher Dichte Ellipsoide, deren Gleichung ist:

$$\varrho = R (1 + \mu c'^2),$$

so hat man für eines dieser Ellipsoide:

$$\Sigma x^2 m = \int \frac{\varrho^5}{5} a'^2 d\omega,$$

$$\Sigma z^2 m = \int \frac{\varrho^5}{5} c'^2 d\omega.$$

Setzt man nun $\varrho^5 = R^5 (1 + 5 \mu c'^2)$, so hat man:

$$\Sigma x^2 m = \frac{4\pi R^5}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu}{3} \right),$$

$$\Sigma z^2 m = \frac{4\pi R^5}{5} \left(\frac{1}{3} + \mu \right),$$

$$\Sigma (x^2 - z^2) m = -\frac{4\pi R^5}{5} \cdot \frac{2\mu}{3}.$$

Für eine Schicht zwischen den Radien R und $R + dR$ hat man daher:

$$\Sigma (x^2 - z^2) m = -4\pi R^4 s \cdot \frac{2\mu}{3} dR,$$

und für den ganzen Körper:

$$\Sigma (x^2 - z^2) m = -\frac{8\pi}{3} \int_0^1 s r^4 \mu dr,$$

$$\Sigma x^2 m = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 s r^4 dr.$$

Wären nun s und μ constant, so hätte man aus a), da $-\mu = A$ ist:

$$A = 1 : 296,$$

da aber bei wachsender Dichte die Abplattung abnimmt, so ist:

$$\frac{\Sigma (x^2 - z^2) m}{\Sigma x^2 m} = \frac{1}{148} < 2A$$

also die Abplattung grösser als $1 : 296$. Behält man die Bezeichnungsweise des § 34 bei, so hat man

$$A = \frac{1}{296} \left[\sum \frac{s_p m_q}{2p + 5} : \sum \frac{s_p m_q}{2(p + q) + 5} \right].$$

Ist z. B. $s = S_0 (1 - pr^2)$, so ist $\mu = M_0 (1 + \alpha pr^2 + \beta p^2 r^4 \dots)$, wobei die Coefficienten α , β , γ die in § 35 angegebenen Werthe besitzen. Führt man die Rechnung aus, so hat man:

$$A = \frac{1}{296} \cdot \frac{1 - (\frac{5}{7} - \alpha)p - (\frac{5}{7}\alpha - \beta)p^2 - (\frac{5}{7}\beta - \gamma)p^3 \dots}{1 - \frac{5}{7}(1 - \alpha)p - \frac{5}{9}(\alpha - \beta)p^2 - \frac{5}{11}(\beta - \gamma)p^3 \dots},$$

und wenn man die Werthe von α , β , γ einsetzt:

$$A = \frac{1}{296} \cdot \frac{1 - 0,5428p - 0,0482p^2 - 0,0152p^3 \dots}{1 - 0,5918p - 0,0539p^2 - 0,0166p^3 \dots}.$$

Setzt man $p = \frac{7}{9}$, so erhält man hieraus

$$A = 1 : 275,$$

welcher Werth mit dem aus den Pendelversuchen abgeleiteten ganz übereinstimmt, da die Nutation, aus welcher dieses A abgeleitet ist, rund gleich 17 Sekunden gesetzt wurde, somit die Differenz zwischen $\frac{1}{283}$ und $\frac{1}{275}$ vollkommen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt.

§ 41.

Ebbe und Fluth. Wirkung von Ebbe und Fluth auf die Lage der Rotationsachse und die Rotationsgeschwindigkeit.

Steht ein flüssiger Körper unter dem Einfluss von Massen, die sich ausserhalb desselben befinden, so kann seine Gestalt nicht mehr die Kugelgestalt sein. Ist die Potentialfunction dieser Massen von ihrem Centrum aus gerechnet gleich V und sind die Coordinaten des Massensystems in Bezug auf das Centrum der flüssigen Masse a, b, c , so heisst die Potentialfunction, wenn man sie auf das Centrum dieser Flüssigkeit reducirt:

$$V_1 + \left(\frac{dV_1}{da} x + \frac{dV_1}{db} y + \frac{dV_1}{dc} z \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dV_1}{da} x + \frac{dV_1}{db} y + \frac{dV_1}{dc} z \right)^2,$$

wobei die gebrauchte Abkürzung keiner weiteren Erklärung bedarf und den Differenzialcoefficienten von V diejenigen Werthe beizulegen sind, welche sie im Punkte $-a - b - c$ besitzen. Die Kräfte, welche auf das Centrum der Flüssigkeit wirken, sind

$$\frac{dV_1}{da}, \quad \frac{dV_1}{db}, \quad \frac{dV_1}{dc}.$$

Bewegt sich nun der flüssige Körper vollkommen frei unter dem Einfluss der Potentialfunction V , so ist die Kraft, welche auf irgend ein Massentheilchen der Flüssigkeit wirkt, soweit sie die gegenseitige Lage der Theilchen zu stören sucht, gleich

$$m \frac{dV}{dx} - m \frac{dV_1}{da} \text{ u. s. f.}$$

Die Potentialfunction der Kraft, welche die gegenseitige Lage der Theilchen zu stören sucht, ist somit:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{dV_1}{da} x + \frac{dV_1}{db} y + \frac{dV_1}{dc} z \right)^2 \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{dV_1}{da} x + \frac{dV_1}{db} y + \frac{dV_1}{dc} z \right)^3, \\ \dots \dots \dots$$

oder auch

$$r^2 U_2 + r^3 U_3 \dots$$

Ist z. B. die Flüssigkeit homogen, so ergibt sich aus den Formeln des § 28, wenn man den Radius ϱ nennt und $\varrho = 1 + \delta$ setzt:

$$V = \frac{4\pi}{3r} + \frac{4\pi}{5r^3} \delta_2 + \frac{4\pi}{7r^4} \delta_3 \dots$$

An der Oberfläche hat man, wenn man noch das specifische Gewicht der Masse gleich σ setzt:

$$V = \frac{4\pi\sigma}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \delta_2 - \frac{4}{7} \delta_3 - \frac{6}{9} \delta_4 \dots \right),$$

und da an der Oberfläche V constant sein muss, so hat man, wenn man zugleich die Masse des flüssigen Körpers mit M bezeichnet:

$$\delta_2 = \frac{5U_2}{2M}, \quad \delta_3 = \frac{7U_3}{4M} \dots,$$

wodurch die Form des flüssigen Körpers sich bestimmt.

Ist die auf den flüssigen Körper wirkende Masse eine Kugel von der Masse m , die sich in der X -Achse befindet, so hat man:

$$\frac{d^2 V_1}{da^2} = \frac{2m}{r^3}, \quad \frac{d^2 V_1}{db^2} = -\frac{m}{r^3}, \quad \frac{d^2 V_2}{dc^2} = -\frac{m}{r^3}, \\ \frac{d^2 V_1}{da db} = \frac{d^2 V_1}{da dc} = \frac{d^2 V_1}{db dc} = 0, \\ \frac{d^3 V_1}{da^3} = \frac{6m}{r^4}, \quad \frac{d^3 V_1}{da db^2} = -\frac{3m}{r^4}, \quad \frac{d^3 V_1}{da dc^2} = -\frac{3m}{r^4}.$$

Alles Uebrige von der dritten Ordnung ist gleich Null. Man hat daher nach gehöriger Reduction:

$$U_2 = \frac{3m}{2r^3} (x'^2 - \frac{1}{3}), \quad U_3 = \frac{5m}{2r^4} (x'^3 - \frac{3}{5} x').$$

Man hat daher:

$$\varrho = 1 + \frac{15}{4} \frac{m}{Mr^3} (x'^3 - \frac{1}{3}) + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \frac{m}{Mr^4} (x'^3 - \frac{3}{5} x') \dots$$

Ist r im Verhältniss zum Radius des flüssigen Körpers sehr gross, so verschwinden die Glieder, welche auf das zweite folgen; der Körper gestaltet sich also zu einem Ellipsoid, dessen grösste Achse in der Richtung des wirkenden Körpers liegt. Ist, wie beim Monde, r nicht sehr gross, so wird auch das dritte Glied noch merklich und man sieht, dass die Höhe der Fluthwelle, wenn der Mond im Zenith steht, grösser ist, als wenn er sich im Nadir befindet und dass die Differenz

$$\frac{14}{15 \cdot r} = \frac{1}{64}$$

von der ganzen Höhe der durch den Mond erregten Fluthwelle ausmacht.

Ist der flüssige Körper nicht homogen, so gestaltet sich die Rechnung etwas anders. Hat man z. B. eine feste Kugel von der mittleren Dichte s , welche von einer dünnen flüssigen Schicht von der Dichte σ bedeckt wird, so ist die Potentialfunction des ganzen Körpers

$$V = \frac{4\pi s}{3r} + \frac{4\pi \sigma}{5r^3} \delta_2.$$

An der Oberfläche hat man alsdann:

$$V = \frac{4\pi s}{3} (1 - \delta_2) + \frac{4\pi \sigma}{5} \delta_2,$$

und hieraus

$$\delta_2 = \frac{15ms}{2Mr^3(5s-3\sigma)}.$$

Berechnet man hieraus die Höhe der Fluthwelle, so erhält man für die Sonne 0,27 Meter und für den Mond 0,57 Meter.

Bewegt sich der Flutherreger wirklich oder scheinbar, so muss sich auch die Fluthwelle bewegen, jedoch ohne mit dem Flutherreger gleichen Schritt zu halten. Denn wenn die Fluthwelle, d. h. die Flüssigkeit, welche die Fluthwelle bildet, sich bewegen soll, so darf diese nie das Niveau ausfüllen, sondern muss immer etwas hinter demselben zurückbleiben und zwar um so mehr, je rascher der Flutherreger sich bewegt. Der Flutherreger schleift mit anderen Worten die Fluthwelle nach sich und bewirkt so eine Rotation des Körpers, auf welchem die Fluthwelle erregt wird. Steht der Flutherreger still und rotirt der flüssige Körper, so wird die Fluthwelle in einem mit der Drehachse concentrischen Kreise über den Körper weggeschleift, sie bewirkt also eine Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit. Steht aber der flüssige Körper still und bewegt sich der Flutherreger um denselben, so ist

der Weg, den die geschleifte Fluthwelle beschreibt, die Bahn des Flutherregers. Die geschleifte Fluthwelle bewirkt also eine Rotation um die Achse der Bahn. Man sieht hieraus leicht ein, dass sich eine flüssige Masse, welche von einem Flutherreger umkreist wird, schliesslich so bewegen muss, dass die Dauer ihrer Rotation gleich der Dauer ihrer Umlaufszeit ist und die Rotationsachse auf der Achse der Bahn senkrecht steht.

§ 42.

Ueber die beiläufige Grösse der Verzögerung der Rotation durch Ebbe und Fluth.

Um eine angenäherte Vorstellung zu bekommen, wie die Fluthwelle verzögernd auf die Rotation einwirkt, denken wir uns, die Bahn des umlaufenden Körpers falle mit der Ebene des Aequators zusammen. Nun ist, wenn man alle Coordinaten auf die drei Hauptachsen des Körpers bezieht:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{3a^2}{2r^5} \sum m x^2 + \frac{3b^2}{2r^5} \sum m y^2 + \frac{3c^2}{2r^5} \sum m z^2 - \frac{1}{2r^3} \sum m \varrho^2,$$

es ist also nach der Methode des § 37:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3a'b'm}{r^3} \sum m (x^2 - y^2).$$

Bleibt nun die Fluthwelle um den Winkel δ hinter dem Flutherreger zurück, so ist $a'b' = -\sin \delta \cos \delta$, also:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3m \sin 2\delta}{2r^3} \frac{\sum m (x^2 - y^2)}{O}.$$

Hat die Fluthwelle die Gleichung:

$$\varrho = 1 + F(x'^2 - \frac{1}{3}),$$

so findet man leicht:

$$\sum m (x^2 - y^2) = \frac{2MF\sigma}{5s},$$

wobei σ das specifische Gewicht der Fluthwelle, s das mittlere specifische Gewicht des Körpers und M dessen Masse bedeutet. Nun ist, wie wir bereits oben gesehen haben, bei homogener Masse $5C = 2M$. Ist der Körper nicht homogen, so ist C etwas kleiner; bedeutet daher ϑ eine Zahl, die etwas grösser, als die Einheit ist, so hat man:

$$\frac{\sum m (x^2 - y^2)}{C} = \frac{\vartheta F \sigma}{s}.$$

Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, die Masse sei homogen wir haben alsdann:

$$F = \frac{15m}{4Mr^3} = \frac{\Sigma m (x^2 - y^2)}{C},$$

$$\frac{dv}{dt} = -m \sin 2\delta \cdot \frac{45m}{8Mr^6},$$

wobei als Längeneinheit der Radius des Körpers zu nehmen ist. Nimmt man als Zeiteinheit den Tag, so ist m gleich dem doppelten Fallraum in der Entfernung Eins während eines Tages. Der Radius des Mondes ist $\frac{3}{11}$ vom Radius der Erde. Sieht man daher den Mond als flüssigen Körper an, dessen Rotationsverzögerung berechnet werden soll, so ist die Masse der Erde gleich

$$m = \frac{9,8 \cdot 3600^2 \cdot 24^2 \cdot \pi \cdot 11^3}{20000000 \cdot 3^3}.$$

Berechnet man hieraus die Verzögerung der Rotation in einem Jahre, so erhält man:

$$\frac{\sin 2\delta}{7120} \text{ Tage,}$$

wenn der Mond in einem Tage sich umdrehen würde. Auf der Erde ist die Verzögerung der Fluthwelle über zwei Stunden, also $\sin 2\delta$ nahezu gleich Eins. Nimmt man diese Angabe als beiläufigen Massstab für das Zurückbleiben der Fluthwelle, so sieht man, dass die Verzögerung der Rotationsbewegung unter dem Einflusse der Erde sehr rasch vor sich gehen musste. Berechnet man die Verzögerung der Rotation der Erde unter dem Einflusse des Mondes, so findet man, dass sie etwa 13000 mal geringer ist und demnach erst in 13000 Jahren den Tag um etwa 12 Sekunden länger machen würde. Dies ist jedoch nicht der wirkliche Betrag der Verzögerung, sondern das Maximum, welches eintreten würde, wenn die Erde überall mit Flüssigkeit von der mittleren Dichte der Erde bedeckt wäre.

§ 43.

Die Bewegung und Stellung der Mondachse. Muthmassungen über die Gestalt des Mondes.

Die Berechnung der Präcession und Nutation der Erdachse hatte sich uns in § 37 dadurch vereinfacht, dass wir die Erde als einen Rotationskörper voraussetzten, indem die Potentialfunction eines solchen

Körpers unverändert bleibt, wenn er sich um die Rotationsachse dreht. Ist aber der Körper kein Rotationskörper, so wird seine Potentialfunction durch die Gleichung dargestellt:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{A(a'^2 - \frac{1}{3})}{r^3} + \frac{B(b'^2 - \frac{1}{3})}{r^3}.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass das Coordinatensystem durch die Hauptachsen des Körpers gebildet werde. a' und b' sind also in diesem Ausdruck immer die Projectionen der Richtung des angezogenen Körpers auf die Achsen X' und Y' des anziehenden Körpers. Dreht sich aber der anziehende Körper um die Z' -Achse um den Winkel φ und bezeichnet man die Projectionen der Richtung des angezogenen Körpers auf die Achsen X und Y durch a'' und b'' , so hat man:

$$a' = a'' \cos \varphi + b'' \sin \varphi,$$

$$b' = b'' \cos \varphi - a'' \sin \varphi,$$

und wenn man dies in den obigen Ausdruck für V substituirt, erhält man:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{(A+B)}{2r^3} (a''^2 + b''^2) + \frac{(A-B) a'' b'' \sin 2\varphi}{r^3} + \frac{(A-B) (a''^2 - b''^2) \cos 2\varphi}{2r^3} - \frac{1}{3r^3} (A+B).$$

Wenn man nun nach der mehrfach angedeuteten Methode die Drehkräfte berechnet, so erhält man:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{m b'' c'' (A+B)}{r^3} + \frac{m (A-B) a'' c'' \sin 2\varphi}{r^3} - \frac{m (A-B) b'' c'' \cos 2\varphi}{r^3},$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{m a'' c'' (A+B)}{r^3} - \frac{m (A-B) b'' c'' \sin 2\varphi}{r^3} + \frac{m (A-B) a'' c'' \cos 2\varphi}{r^3}.$$

Nun ist ferner, wie wir bereits in § 37 gefunden haben:

$$b'' c'' = \sin^2 \varphi' \sin i \cos i, \quad a'' c'' = \sin \varphi' \cos \varphi' \sin i.$$

Lässt man nun alle periodischen Theile weg, die bei der Integration verschwinden, so hat man:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{m b'' c'' (A+B)}{r^3},$$

ganz wie in § 37, wenn man $A+B=2D$ setzt. Wir haben daher für die Verschiebung der Achse nach einem ganzen Umlauf

$$\frac{\pi m (A+B) \sin i \cos i}{u C (M+m) (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für Erde und Mond gestaltet sich die Rechnung etwas anders; denn weil Rotationsdauer und Umlaufszeit gleich sind, so hat man:

$$\sin 2\varphi = \sin 2\varphi' + c_1 \sin 4\varphi' + c_2 \sin 6\varphi' \dots,$$

wobei $c_1 c_2 \dots$ mit den Potenzen der Excentricität convergiren. Wenn man nun noch berücksichtigt, dass der Winkel i klein ist, also sein Cosinus gleich 1 gesetzt werden darf, so hat man für den nicht periodischen Theil:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{m A}{r^3}.$$

Für Erde und Mond ist $u = 1$. Die Verschiebung der Mondachse nach einem Monat ist also, wie sich durch Vergleichung der Resultate des § 37 ebenfalls ergibt:

$$\frac{2\pi A \sin i \cos i}{C}.$$

Rechnet man noch die Verschiebung der Mondachse durch die Sonne hinzu, so hat man:

$$\frac{\pi}{C} \left[2A \sin i \cos i + \frac{(A+B) \sin i' \cos i'}{13^2} \right],$$

weil das Jahr 13 siderische Monate zählt. Man kann also die Wirkung der Sonne, ohne einen namhaften Fehler zu begehen, vernachlässigen.

Nun bewegt sich die Mondachse um die Achse der Ekliptik in einem Kreise, dessen Radius $1^\circ 30' 10''$ beträgt und zwar so, dass die Durchschnittslinie des Mondäquators und der Ekliptik beständig mit den Mondknoten zusammenfällt und die Ebenen des Mondäquators und der Mondbahn $6^\circ 38' 49''$ gegen einander geneigt sind. Mit anderen Worten: die Achse der Mondbahn und die Drehungsachse des Mondes liegen in einer Ebene mit der Achse der Ekliptik, und diese Ebene dreht sich um die Achse der Ekliptik. Bezeichnet man die Zeit des Umlaufs der Knotenlinie durch N (in Monaten ausgedrückt), so hat man die Gleichung:

$$a) \quad \frac{2\pi \sin 1^\circ 30' 10''}{N} = \frac{\pi A}{C} \sin 13^\circ 17' 38''.$$

Wäre die Oberfläche des Mondes mit Wasser bedeckt, so wäre an der Oberfläche dieses Wassers (vergl. §§ 36 und 41):

$$V' = M \left[1 - (x'^2 - \frac{1}{3}) \left(\frac{Q}{2} + \frac{3m}{2Mr^3} \right) - (y'^2 - \frac{1}{3}) \frac{Q}{2} \right].$$

Für die Fernwirkung der Mondmasse hätten wir alsdann:

$$V = \frac{M}{r} + M \left(\alpha - \frac{Q}{2} - \frac{3m}{2Mr^3} \right) \frac{(x'^2 - \frac{1}{3})}{r^3} + M \left(\beta - \frac{Q}{2} \right) \frac{(y'^2 - \frac{1}{3})}{r^3},$$

wobei vorausgesetzt wird, dass das Niveau des Meeres auf dem Monde die Gleichung habe:

$$\varrho = 1 + \alpha (x'^2 - \frac{1}{3}) + \beta (y'^2 - \frac{1}{3}).$$

Setzt man zur Vereinfachung der Rechnung voraus, dass die Masse des Mondes homogen sei, so wird $5C = 2M$; es ist also:

$$\frac{A}{C} = \frac{5}{2} \left(2\alpha - Q - \frac{3m}{Mr^3} \right),$$

und wenn man dies in die Gleichung a) substituiert, erhält man:

$$2\alpha - Q - \frac{3m}{Mr^3} = 0,000732.$$

Das Q für den Mond lässt sich aus dem für die Erde leicht berechnen; es ist nämlich

$$Q = \frac{v^2 \varrho^3}{M}.$$

Setzt man nun für die Erde $Q = Q'$ u. s. f., so hat man:

$$Q = \frac{Q' v^2 \varrho^3 M'}{v'^2 \varrho'^3 M},$$

und hieraus, wenn man den Ausdruck für Q' in § 36 zu Hülfe nimmt:

$$Q = 0,0000083.$$

Ferner findet man:

$$\frac{3m}{Mr^3} = 0,0000244.$$

Hieraus hat man endlich:

$$\alpha = 0,00038 = 1 : 2630.$$

Die uns zugekehrte Aequatorialachse des Niveaus auf dem Monde ist also $\frac{1}{2630}$ länger als die Polarachse. Wäre der Mond homogen und flüssig, so hätte seine Oberfläche die Gleichung:

$$\varrho = 1 + \left(\frac{5Q}{4} + \frac{15m}{4Mr^3} \right) x'^2 + \frac{5Q}{4} y'^2,$$

es wäre also:

$$\alpha = \frac{5}{4} \left(Q + \frac{3m}{Mr^3} \right) = 0,000041 = 1 : 24000,$$

mithin bedeutend kleiner, als wir oben gefunden haben.

Zur Erklärung dieses Widerspruches genügt schon die Annahme, dass die Aequatorialgegenden des Mondes ausgedehnte Hochebenen sind, deren durchschnittliche Höhe 4000 Fuss beträgt.

§ 44.

Warum die Mondachse auf der Ekliptik senkrecht steht.

Bemerkung über eine Störung der Mondbahn.

Wir wir aus den bisherigen Betrachtungen gesehen haben, sucht sich der Pol eines Himmelskörpers immer rückläufig im Kreise um den Pol der Bahn des um denselben umlaufenden Körpers zu drehen mit einer Geschwindigkeit, welche proportional ist dem Sinus der doppelten Neigung. Der Pol der Mondbahn beschreibt aber einen Kreis um den Pol der Ekliptik. Würde nun die Erde allein auf den Mond wirken, so würde die Mondachse offenbar eine kreisähnliche Curve beschreiben; würde die Sonne allein wirken, so würde der Mondpol sich in einem wirklichen Kreise um den Pol der Ekliptik bewegen. Beide Wirkungen zusammen würden, wie sich leicht auch ohne Rechnung übersehen lässt, im Allgemeinen eine sehr complicirte cycloidische Bewegung des Mondpols um die Achse der Ekliptik bewirken. Die jetzige Bewegung des Mondpols kann daher, wenn man nicht einen merkwürdigen Zufall annehmen will, nur unter dem Einfluss einer Kraft entstanden sein, welche so lange gekämpft hat, bis sie den heutigen Zustand ins Dasein rief. Diese Kraft kann keine andere gewesen sein, als die Reibung der durch die Erde auf den Mond geschleiften Fluthwelle, welche, wie oben bereits erklärt wurde, in zweifacher Richtung sich geltend machte, einmal durch Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit und dann durch Verlegung der Rotationsachse in der Richtung des Pols der Mondbahn.

Nimmt man zur Vereinfachung der Rechnung an, dass die ganze Verschiebung des Mondpols auf einem so kleinen Kugelabschnitt vor sich gehe, dass man ohne Fehler das ebene Coordinatensystem anwenden darf; nimmt man ferner den Radius des Kreises, welchen der Pol der Mondbahn beschreibt, zur Einheit, setzt man die Geschwindigkeit, mit welcher der Mondpol sich um den Pol der Mondbahn zu bewegen sucht, α , und setzt man endlich voraus, dass sich in Folge der Reibung

der Fluthwelle der Mondpol gegen den Pol der Mondbahn mit der Geschwindigkeit $\alpha \varrho$ bewege, wenn ϱ die Entfernung des Mondpols vom Pol der Mondbahn bedeutet, nennt man schliesslich die Coordinaten des Mondpols x und y und die Coordinaten des Pols der Mondbahn x' und y' (vom Pol der Ekliptik aus gerechnet), so hat man:

$$\frac{dx}{dt} = a(y' - y) + \alpha(x' - x),$$

$$\frac{dy}{dt} = -a(x' - x) + \alpha(y' - y).$$

Nun ist $x' = \cos t$, $y' = \sin t$; man hat also:

$$\frac{dx}{dt} = a \sin t + \alpha \cos t - a y - \alpha x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -a \cos t + \alpha \sin t + a x - \alpha y.$$

Wenn man nun mit Hülfe der zweiten Gleichung x und x' durch y ausdrückt und in die erste substituirt, erhält man:

$$y'' + 2\alpha y' + (a^2 + \alpha^2)y = (a + a^2 + \alpha^2)\sin t + \alpha \cos t,$$

und hieraus durch Integration:

$$y = e^{-\alpha t}(c_1 \sin at + c_2 \cos at) - \frac{a}{1-a} \sin t - \frac{\alpha}{(1-a)^2} \cos t,$$

$$x = e^{-\alpha t}(c_1 \cos at - c_2 \sin at) - \frac{a}{1-a} \cos t + \frac{\alpha}{(1-a)^2} \sin t.$$

Die Ausdrücke c_1 und c_2 sind die beliebigen Integrationsconstanten; die Coefficienten von $\sin t$ und $\cos t$ sind durch Weglassung aller höheren Potenzen von α vereinfacht. Nach einer hinlänglich grossen Zeit hat man:

$$y = -\frac{a}{1-a} \sin t - \frac{\alpha}{(1-a)^2} \cos t,$$

$$x = -\frac{a}{1-a} \cos t + \frac{\alpha}{(1-a)^2} \sin t,$$

d. h. der Mondpol beschreibt (ganz so, wie die Natur zeigt) einen Kreis um den Pol der Ekliptik, dessen Radius gleich

$$\frac{1}{1-a} \sqrt{a^2 + \frac{\alpha^2}{(1-a)^2}}$$

ist, so dass der Pol der Ekliptik sich zwischen dem Mondpol und der Achse der Mondbahn befindet und die Radien der beiden durch den

Mondpol und den Pol der Mondbahn beschriebenen Kreise einen kleinen Winkel bilden, dessen Tangente gleich $\frac{\alpha}{(1-a)a}$ ist, also jedenfalls verschwindet.

Schliesslich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass jede Störung der Rotationsachse oder der Rotationsgeschwindigkeit von einer entsprechenden Störung der Bahn des umlaufenden Körpers begleitet ist, wie sich aus dem Princip der Flächenräume (§ 10) mit Leichtigkeit ergibt. Das Drehungsmoment der Erde ist nach § 39 gleich

$$C = \frac{1}{3} Mv,$$

wenn man den Radius der Erde als Einheit nimmt. Das Drehungsmoment des Mondes in seiner Bahn ist:

$$C' = m 60^2 \cdot v',$$

wenn man unter v' die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes versteht; es ist also

$$\frac{C}{C'} = \frac{Mv}{3m \cdot 60^2 v'} = \frac{1}{5}$$

beiläufig. Eine Verschiebung der Achse der Erde um 5 Sekunden in Folge der Einwirkung des Mondes ist also stets von einer Verschiebung der Achse der Mondbahn um etwa eine Sekunde begleitet. In Folge der Einwirkung des Mondes auf die Erde bewegt sich deren Achse (wenn man von der Nutation absieht) beständig in der Richtung ZD (§ 38 Fig. 6); es bewegt sich also die Achse der Mondbahn in entgegengesetzter Richtung; für die Erdachse hat man (§ 38):

$$\frac{dx}{d\gamma} = \frac{FN \sin a \cos a}{2\pi} \left(\frac{2 - 3 \sin^2 b}{2} \right),$$

also für die Achse der Mondbahn:

$$\frac{dx}{d\gamma} = - \frac{FN \sin a \cos a}{5 \cdot 2\pi} \left(\frac{2 - 3 \sin^2 b}{2} \right) = -c.$$

Ohne die störende Kraft der Erde würde sich die Achse der Mondbahn im Mittel stets senkrecht auf dem Radius ϱ bewegen, welcher die Achse der Mondbahn und die Achse der Ekliptik verbindet. Ohne die störende

Kraft der Erde hätte man daher $\frac{d\varrho}{d\gamma} = 0$; mit dieser hat man:

$$\frac{d\varrho}{d\gamma} = -c \sin \gamma; \quad \varrho = C + c \cos \gamma.$$

In Folge der störenden Kraft der Erde ist also die mittlere Linie, welche die Achse der Mondbahn um die Achse der Ekliptik beschreibt, kein Kreis, sondern eine Ellipse, deren grosse Achse mit der Verbindungslinie der Erdachse und der Ekliptik zusammenfällt. Durch Berechnung aus den Zahlenangaben in § 38 erhält man:

$$c = 8''.$$

Die mittlere Neigung der Mondbahn ist also am grössten, wenn die Achse der Mondbahn der Erdachse am nächsten ist, und am kleinsten, wenn sie sich am weitesten von der Erdachse entfernt hat; die Differenz der beiden mittleren Neigungen beträgt beiläufig 16 Sekunden.

§ 45.

Ueber den Erdmagnetismus.

Rührt der Erdmagnetismus von magnetischen Massen innerhalb der Erde her, so hat man:

$$V = \frac{U_1}{r^2} + \frac{U_2}{r^3} \dots$$

Die Componenten der magnetischen Kraft in der Richtung von Süd nach Nord, von West nach Ost und in senkrechter Richtung aufwärts sind:

$$\frac{dV}{r d\zeta}, \quad \frac{dV}{r \sin \zeta d\varphi}, \quad \frac{dV}{dr}.$$

Kennt man die drei Componenten von acht verschiedenen Punkten der Erde, welche weit genug auseinanderliegen, so hat man 24 Zahlenwerthe, mit Hülfe deren man 24 Kugelfunctionen bis zur 4^{ten} Ordnung einschliesslich bestimmen kann. Liegen die wirkenden Massen ausserhalb der Erde, so ist

$$V = r U_1 + r^2 U_2 \dots$$

In beiden Fällen sind die horizontalen Componenten gleich, aber die verticalen Componenten sind verschieden; denn wenn die Massen innerhalb liegen, hat man für die verticale Componente (den Radius gleich 1 gesetzt):

$$-2U_1 - 3U_2 \dots$$

und wenn sie ausserhalb liegen:

$$U_1 + 2U_2 \dots$$

Kennt man die Declination und die horizontale Intensität an einer hinlänglichen Anzahl von Orten, so lässt sich V an der Oberfläche graphisch

ganz leicht construiren. Denn denkt man sich die Richtungen, welche senkrecht auf der Richtung der Magnetnadel stehen, in geschlossenen Linien verbunden, so erhält man offenbar Linien des gleichen V , und nimmt man die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Linien umgekehrt proportional der horizontalen Kraft an, so erhält man ein System von Niveaulinien, welche alle um einen gleichen Betrag von ΔV differiren und mit Hülfe deren sich V an jedem einzelnen Punkte der Erde bestimmen lässt. Zugleich sieht man leicht ein, dass Declination und horizontale Intensität in einer gewissen Weise von einander abhängig sind. Denn sind die Curven der auf der Richtung der Magnetnadel senkrechten Richtungen gegeben, so braucht man die horizontale Intensität nur in einem Punkte einer Niveaucurve zu wissen, um sie sogleich längs der ganzen Niveaucurve zu wissen. Dieser Umstand erleichtert wesentlich die Construction von V auf der Oberfläche, indem man viel leichter zuverlässige Angaben sowohl über die Declination, als über die Intensität erhalten kann. Der hier betonte Zusammenhang zwischen Declination und Intensität drückt sich analytisch durch die Gleichung aus:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dV}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dV}{d\varphi} \right).$$

Diese Gleichung hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung, wenn man sich erinnert, dass $\frac{dV}{d\xi}$ die Süd-Nord-Componente und $\frac{dV}{d\varphi}$ die mit $\sin \xi$ (dem Cosinus der Breite) multiplicirte West-Ost-Componente der magnetischen Kraft umgiebt. — Bezeichnet man die Functionen $\frac{dV}{d\xi}$ und $\frac{dV}{d\varphi}$ einfach durch Z und Φ , kennt man ferner diese Functionen für drei Punkte, welche ziemlich nahe bei einander liegen, bezeichnet man ferner die drei Punkte durch p_0, p_1, p_2 , die relativen Coordinaten von p_1 und p_2 gegen p_0 durch $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2$ und $\Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2$, so hat man nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Delta Z_1 = \Delta \xi_1 \frac{d^2 V_0}{d\xi^2} + \Delta \varphi_1 \frac{d^2 V_0}{d\xi d\varphi},$$

$$\Delta \Phi_1 = \Delta \xi_1 \frac{d^2 V_0}{d\xi d\varphi} + \Delta \varphi_1 \frac{d^2 V_0}{d\varphi^2},$$

$$\Delta Z_2 = \Delta \xi_2 \frac{d^2 V_0}{d\xi^2} + \Delta \varphi_2 \frac{d^2 V_0}{d\xi d\varphi},$$

$$\Delta \Phi_2 = \Delta \xi_2 \frac{d^2 V_0}{d\xi d\varphi} + \Delta \varphi_2 \frac{d^2 V_0}{d\varphi^2}.$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die drei Differenzial-coefficienten, so hat man folgende Gleichung, welche die Abhängigkeit der Kräfte von einander angiebt:

$$\Delta \varphi_1 \Delta \varphi_2 (\Delta \Phi_1 \Delta \zeta_2 + \Delta \Phi_2 \Delta \zeta_1) + (\Delta \zeta_1)^2 \Delta \varphi_2 \Delta Z_2 + (\Delta \zeta_2)^2 \Delta \varphi_1 \Delta Z_1 \\ + \Delta \zeta_1 \Delta \zeta_2 (\Delta Z_1 \Delta \varphi_2 + \Delta Z_2 \Delta \varphi_1) + (\Delta \varphi_1)^2 \Delta \zeta_2 \Delta \Phi_2 + (\Delta \varphi_2)^2 \Delta \zeta_1 \Delta \Phi_1.$$

Bilden die drei Punkte z. B. ein rechtwinkliges Dreieck, so dass man hat: $\Delta \varphi_1 = 0$ und $\Delta \zeta_2 = 0$, so giebt unsere Gleichung:

$$\Delta \varphi_2 \Delta \Phi_1 = \Delta \zeta_1 \Delta Z_2,$$

was sich auch leicht verificiren lässt; denn

$$\Delta \Phi_1 = \Delta \zeta_1 \frac{d^2 V_0}{d\zeta d\varphi}, \quad \Delta Z_2 = \Delta \varphi_2 \frac{d^2 V_0}{d\zeta d\varphi}.$$

Wenn sich irgendwo die Niveaulinien bis zu einem Punkte vernagern (wie z. B. wenn sie concentrische Kreise sind), so heisst dieser Punkt Pol. Es kann auch der Fall sein, dass zwei gleichnamige Pole auftreten, wie man sich ohne Mühe überzeugt, wenn man sich denkt, dass die Niveaulinien irgendwo ein System von Lemniscaten bilden. Wir haben aber alsdann nicht blos zwei, sondern drei Pole. Definirt man einen Pol als einen Punkt, in welchem die Magnetnadel senkrecht steht und in dessen unmittelbarer Nähe die Richtungen der Magnetnadel gegen denselben convergiren, so ist klar, dass nicht blos die beiden Pole des Lemniscatensystems Magnetpole sind, sondern auch dessen Mittelpunkt, und zwar in der Weise, dass der Mittelpunkt des Lemniscatensystems einen Südpol bildet, wenn die beiden Pole derselben Nordpole sind.

Hat man in der oben angedeuteten Weise oder auch durch Rechnung aus gegebenen Werthen V kennen gelernt, so hat man es nur in Kugelfunctionen aufzulösen, um sofort auch die Inclination zu erfahren. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, dass die an der Oberfläche wirkende magnetische Kraft nur von Massen im Innern der Erde herrührt. Rührt die Kraft von Massen her, die theilweise innerhalb, theilweise ausserhalb der Erdoberfläche liegen und bezeichnet man die Potentialfunction welche die ersten auf der Oberfläche erzeugen, durch u , und die Potentialfunction, welche die zweiten erzeugen, durch v , und kennt man ferner die Kraftcomponente in senkrechter Richtung, welche J heissen soll, so hat man, wenn man Alles in Kugelfunctionen auflöst:

$$u_n + v_n = V_n, \\ -(n+1)u_n + nv_n = J_n,$$

und hieraus:

$$u_n = \frac{n V_n - J_n}{2n + 1},$$

$$v_n = \frac{(n + 1) V_n + J_n}{2n + 1},$$

welche Gleichung dazu dienen kann, aus den beobachteten Werthen für die Inclination zu bestimmen, welcher Theil der magnetischen Wirkung ausserhalb der Erdoberfläche seinen Ursprung hat.

Aus der Theorie der Kugelfunctionen überzeugt man sich leicht, dass die Niveaulinien auf der Oberfläche um so regelmässiger verlaufen müssen, je mehr sich die wirkenden Massen in der Nähe des Centrums befinden. Da nun die Niveaulinien des Magnetismus in der Natur so starke Unregelmässigkeiten zeigen, so ist offenbar, dass die magnetische Kraft in der Nähe der Erdoberfläche vorzugsweise ihren Sitz haben muss. Wenn man endlich in Betracht zieht, dass die Niveaulinien innerhalb einiger Jahrhunderte sich gänzlich umgestalten, so wird man die Vermuthung gerechtfertigt finden, dass innerhalb des flüssigen Erdinnern Strömungen stattfinden, die nach einer längern Reihe von Jahren eine ganz andere Lagerung der wirkenden Theile zur Folge haben.

§ 46.

Vertheilung der Elektrizität auf zwei Kugeln im Zustande des Gleichgewichts. Anziehung und Abstossung derselben. Vervollständigung der Formel in § 32 über die Quantität der durch Entladung einer Leydener Flasche entwickelten lebendigen Kraft.

Die Aufgabe, die Vertheilung der Elektrizität auf zwei Kugeln im Zustande des Gleichgewichts, sowie die gegenseitige Wirkung dieser zwei Kugeln zu finden, lässt sich am einfachsten in folgender Weise lösen.

Man belege zuerst die erste Kugel mit dem Quantum Q , so dass das Niveau gleich V_1 wird. Dieses Quantum wird sich alsdann, abgesehen von der andern Kugel, gleichförmig vertheilen und seine Wirkung wird gerade so sein, als ob Q im Centrum der ersten Kugel vereinigt wäre. Denken wir uns dieses Quantum Q vorläufig fest, so wird dasselbe auf der zweiten, mit der Erde in leitender Verbindung gedachten Kugel eine elektrische Vertheilung von der Quantität $-Q'$ hervorrufen, welche gerade so wirkt, als ob die Masse $-Q'$ in einem einzigen Punkte vereinigt wäre, der sich nach § 30 leicht bestimmen

lässt. Nun ist auf der zweiten Kugel Gleichgewicht mit dem constanten Niveau Null, aber nicht auf der ersten Kugel; denn auf dieser ist das Niveau gleich $V_1 +$ der Potentialfunction, welche $-Q'$ auf der ersten Kugel erzeugt. Lässt man nun $-Q'$ auf die erste Kugel wieder wirken, so wird dort die Masse $+Q''$ inducirt, welche, mit Q' vereint, wieder das ursprüngliche Niveau V_1 herstellt. Jetzt ist aber auf der zweiten Kugel das Gleichgewicht gestört; um es wieder herzustellen, muss man Q'' auf die zweite Kugel wirken und dort $-Q'''$ induciren lassen. Es ist nun offenbar, dass man, so fortfahrend, den Gleichgewichtszustand in Form einer convergenten unendlichen Reihe erhält, so dass auf der ersten Kugel schliesslich das constante Niveau V_1 und auf der zweiten das constante Niveau Null herrscht, und wenn man endlich dasselbe Verfahren auf die zweite Kugel anwendet, indem man diese bis zum Niveau V_2 mit Elektrizität ladet, so erhält man schliesslich die allgemeinste Lösung unserer Aufgabe.

Zunächst wollen wir den einfachern Fall betrachten, wenn die zwei Kugeln gleich sind.

In § 30 haben wir gesehen, dass die Quantität Q in der Entfernung s vom Centrum einer Kugel, deren Radius R ist, die Quantität $-\frac{QR}{s}$ inducirt, welche nach aussen gerade so wirkt, als ob sie in der

Entfernung $\frac{R^2}{s}$ vom Centrum der Kugel auf der Verbindungslinie des

Centrums und der Quantität Q concentrirt wäre. Nimmt man nun die Radien der beiden Kugeln als Einheit und ladet man die erste Kugel mit der Quantität 1, so inducirt diese auf der zweiten Kugel die Quantität $-\frac{1}{s}$ in der Entfernung $\frac{1}{s}$ von dem Centrum der zweiten Kugel

und in der Entfernung $s - \frac{1}{s} = \frac{s^2 - 1}{s}$ von der ersten Kugel; die Quan-

tität $-\frac{1}{s}$ in der Entfernung $\frac{s^2 - 1}{s}$ von der ersten Kugel inducirt wie-

der auf dieser die Quantität $\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{1}{s^2 - 1}$ in der Entfernung $\frac{s}{s^2 - 1}$

von der ersten Kugel und in der Entfernung $\frac{s(s^2 - 1) - s}{s^2 - 1}$ von der zwei-

ten Kugel u. s. f. Sieht man überhaupt vom Vorzeichen der Quantitäten ab und nennt man die n^{te} inducirte Quantität q_n und die Entfernung derselben vom Centrum der Kugel, worauf sie inducirt wird, ϱ_n , so hat man:

$$q_{n+1} = \frac{q_n}{s - q_n}; \quad \varrho_{n+1} = \frac{1}{s - q_n}; \quad q_{n+1} = q_n \varrho_{n+1}.$$

Nun ist $q_0 = 1$; $\varrho_0 = 0$; man erhält also successive:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= 0, & q_0 &= 1, \\ \varrho_1 &= \frac{1}{s}, & q_1 &= \frac{1}{s}, \\ \varrho_2 &= \frac{s}{s^2 - 1}, & q_2 &= \frac{1}{s^2 - 1}, \\ \varrho_3 &= \frac{s^2 - 1}{s^3 - 2s}, & q_3 &= \frac{1}{s^3 - 2s}, \\ &\dots & & \end{aligned}$$

und wenn man die Ausdrücke s , $s^2 - 1$, $s^3 - 2s$ u. s. f. einfach durch s_1 , s_2 , s_3 u. s. f. bezeichnet, so hat man:

$$\varrho_n = \frac{s_{n-1}}{s_n}, \quad q_n = \frac{1}{s_n}.$$

Setzt man in den obigen Gleichungen $q_n = \frac{1}{s_n}$, so erhält man zur successiven Bildung der Ausdrücke s_n die Gleichung:

$$a) \quad s_{n+1} = s_1 s_n - s_{n-1}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Regel erhält man:

$$b) \quad s_n = s_m s_{n-m} - s_{m-1} s_{n-m-1}.$$

Die in beiden Kugeln schliesslich enthaltenen Quantitäten sind:

$$\left(1 + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_4} \dots\right) \text{ und } -\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_5} \dots\right).$$

Die Anziehung beider Kugeln ist, wenn man die Entfernung der beiden Quantitäten q_m und q_n durch $(m\ n)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} &1 \left[\frac{1}{s(01)^2} + \frac{1}{s_3(03)^2} + \frac{1}{s_5(05)^2} \dots \right] \\ &+ \frac{1}{s_2} \left[\frac{1}{s(21)^2} + \frac{1}{s_3(23)^2} + \frac{1}{s_5(25)^2} \dots \right] \\ &\dots \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (m\ n) &= s - \varrho_m - \varrho_n = s - \frac{s_{m-1}}{s_m} - \frac{s_{n-1}}{s_n} \\ &= \frac{s s_m s_n - s_n s_{m-1} - s_m s_{n-1}}{s_m s_n}. \end{aligned}$$

Ferner findet man mit Benutzung von a) und b):

$$\begin{aligned} s s_m s_n - s_n s_{m-1} - s_m s_{n-1} &= s_m (s s_n - s_{n-1}) - s_n s_{m-1} \\ &= s_m s_{n+1} - s_{m-1} s_n = s_{m+n+1}. \end{aligned}$$

Die Anziehung ist also:

$$\begin{aligned} &s_0 \left(\frac{s_1}{s_2^2} + \frac{s_3}{s_4^2} + \frac{s_5}{s_6^2} \dots \right) \\ &+ s_2 \left(\frac{s_1}{s_4^2} + \frac{s_3}{s_6^2} + \frac{s_5}{s_8^2} \dots \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch einfacher darstellen. Fasst man nämlich alle zu demselben Nenner gehörigen Zähler zusammen, so hat man:

$$\frac{s_0 s_1}{s_2^2} + \frac{s_0 s_3 + s_2 s_1}{s_4^2} + \frac{s_0 s_5 + s_2 s_3 + s_4 s_1}{s_6^2} \dots$$

Nun giebt uns die Gleichung b):

$$s_m s_n = s_{m+n} + s_{m-1} s_{n-1}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Regel hat man:

$$c) \quad s_m s_n = s_{m+n} + s_{m+n-2} \dots + s_{m-n},$$

und wenn man dies auf den Ausdruck für die Anziehung anwendet, so erhält derselbe die Gestalt:

$$d) \quad \frac{s_1}{s_2^2} + \frac{s_1 + 2s_3}{s_4^2} + \frac{s_1 + 2s_3 + 3s_5}{s_6^2} \dots$$

Sind beide Kugeln bis zum Niveau 1 elektrisirt, so ist die auf jeder derselben angesammelte Elektrizität gleich

$$1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3} \dots$$

Die Abstossung derselben berechnet sich leicht zu

$$e) \quad \frac{1}{s_1^2} - \frac{2s_1}{s_2^2} + \frac{1 + 3s_2}{s_3^2} - \frac{2s + 4s_3}{s_4^2} \dots$$

Um s durch die Potenzen von s auszudrücken, hat man die Formel:

$$f) \quad s_n = s^n - (n-1) s^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} s^{n-4} \dots,$$

welche sich mit Hülfe von a) leicht beweisen lässt. Ebenso findet man:

$$g) \quad \frac{ds_n}{ds} = ns_{n-1} + (n-2)s_{n-3} + (n-4)s_{n-5} \dots,$$

und wenn man dieses Resultat mit d) vergleicht, so sieht man, dass die anziehende Kraft gleich

$$\frac{1}{2} \frac{dQ}{ds}$$

ist, wenn man die Quantität der auf der ersten Kugel befindlichen Elektrizität bei dem Niveau 1 durch Q bezeichnet. Bezeichnet man ferner die Quantität der auf der abgeleiteten Kugel befindlichen Elektrizität durch $-Q'$, so ist die zwischen zwei bis zum Niveau 1 elektrisirten Kugeln wirkende Kraft gleich

$$-\frac{dQ}{ds} + \frac{dQ'}{ds}.$$

Nachstehende Tabelle giebt die verschiedenen Werthe von Q , Q' , sowie ihrer Differenzialcoefficienten bei den angegebenen Entfernungen:

s	Q	Q'	$-\frac{1}{2} \frac{dQ}{ds}$	$-\frac{1}{2} \frac{dQ'}{ds}$
2.0	$Q' + 0.69314$	∞	∞	$-\frac{1}{2} \frac{dQ}{ds} + \frac{1}{2} \cdot 0.073858$
2.1	1.58396	0.88175	1.13844	1.17439
2.2	1.43131	0.73278	0.52852	0.56350
2.3	1.34827	0.63395	0.32917	0.36357
2.4	1.29316	0.57202	0.23159	0.26464
2.5	1.25324	0.52537	0.17432	0.20630
2.6	1.22218	0.48819	0.13696	0.16787
2.7	1.19755	0.45746	0.11082	0.14090
2.8	1.17738	0.43140	0.09174	0.12073
2.9	1.16056	0.40886	0.07720	0.10526
3.0	1.14629	0.38908	0.06952	0.09299
3.1	1.13404	0.37151	0.05693	0.08304
3.2	1.12340	0.35571	0.04963	0.07481
3.3	1.11410	0.34150	0.04363	0.06791
3.4	1.10588	0.32852	0.03803	0.06203
3.5	1.09859	0.31663	0.03441	0.05697
3.6	1.09208	0.30569	0.03084	0.05257
3.7	1.08623	0.29557	0.02775	0.04872
3.8	1.08095	0.28607	0.02509	0.04531
3.9	1.07617	0.27742	0.02278	0.04229
4.0	1.07182	0.26924	0.02075	0.03958

Die Abstossung zweier bis zum Niveau 1 elektrisirter Kugeln vom Radius 1 ist $\frac{dQ'}{ds} - \frac{dQ}{ds}$, wird also durch folgende Tabelle gegeben:

s	Kraft.	s	Kraft.
2.0	0.07386	3.0	0.05414
2.1	7190	3.1	5222
2.2	6996	3.2	5036
2.3	6880	3.3	4976
2.4	6610	3.4	4680
2.5	6396	3.5	4512
2.6	6182	3.6	4346
2.7	6016	3.7	4194
2.8	5798	3.8	4044
2.9	5612	3.9	3902

Ich entnehme diese Zahlen aus Beer's Einleitung in die Elektrostatik S. 92, welcher W. Thomson als Gewährsmann anführt.

Der Satz, dass die Kraft zwischen einer isolirten Kugel und einer abgeleiteten Kugel gleich $\frac{1}{2} \frac{dQ}{ds}$ ist, folgt auch ganz einfach aus den in § 7 bewiesenen allgemeinen Sätzen über das Potential. Werden zwei geladene Kugeln genähert oder entfernt, so tritt eine Aenderung der Lage aller elektrischen Theilchen ein und die dazu erforderliche Arbeit ist $-dPot.$ Nun besteht die ganze aufgewendete Arbeit dA aus zwei Theilen, einem Theil, welcher zur Aenderung der Entfernung der Kugeln erforderlich wird und gleich $-Kraft \cdot ds$ ist, und demjenigen Theil, welcher sich durch Aenderung der Lagerung der elektrischen Theilchen auf den Kugeln selbst consumirt. Letzterer Theil der Arbeit ist aber nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null, da sich der Voraussetzung nach die Elektricität auf beiden Kugeln im Gleichgewicht befindet. Sind die Niveaux der beiden Kugeln N_1 und N_2 , ihre Elektricitätsmengen E_1 und E_2 , so ist

$$E_1 = Q N_1 - Q' N_2; \quad E_2 = Q N_2 - Q' N_1;$$

$$Pot. = E_1 N_1 + E_2 N_2.$$

Differenzirt man dieses und lässt E_1 und E_2 constant, so erhält man die Kraft, und wenn man in dem erhaltenen Resultat E_1 und E_2 durch N_1 und N_2 ausdrückt, so ergibt sich:

$$\text{Kraft} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{ds} (N_1^2 + N_2^2) - \frac{dQ'}{ds} N_1 N_2.$$

Ueber die Wechselwirkung zwischen elektrisirten Kugeln hat Snow Harris (Beer a. a. O. S. 93) Versuche angestellt. Derselbe bestimmte mit Hülfe einer gewöhnlichen Waage die Anziehung zwischen einer Kugel, welche isolirt war und mit der innern Belegung einer geladenen Batterie in Verbindung stand, und einer gleich grossen, aber abgeleiteten Kugel. Für verschiedene Entfernungen ergaben sich nachstehende Anziehungen:

Entfernung:	Anziehung:
2.3	15.
2.5	8.25
2.8	4.6
3.0	3.5

Nach der obigen Tabelle müsste man für die Anziehungen folgende Verhältnisszahlen erhalten:

3,5 4,87 9,26 17.

Wie man sieht, herrscht ziemlich Uebereinstimmung. Die Differenzen zwischen Beobachtung und Wahrnehmung

0,27 1 2

steigen mit der anziehenden Kraft. Sie deuten darauf hin, dass der Anziehung eine andere Kraft entgegenwirkt, die mit der Stärke der Ladung wächst, und diese Kraft erklärt sich nach meiner Ansicht leicht, wenn man sich erinnert, dass Körper, welche einseitig mit Elektrizität geladen sind, sich in Folge des Elektrizitätsverlustes in einer Richtung bewegen, welche derjenigen Richtung entgegengesetzt ist, wo die Anhäufung von Elektrizität sich befindet. Nun sind aber die zwei Kugeln, um die es sich in vorliegendem Beispiel handelt, auf den Seiten, welche sie sich zukehren, mit Elektrizität weit stärker geladen, als auf den anderen Seiten; es muss also nothwendigerweise zwischen ihnen eine abstossende Wirkung stattfinden, welche die gegenseitige Anziehung theilweise lähmt.

Nachdem wir die Abstossung zwischen zwei gleich grossen elektrisirten Kugeln kennen gelernt haben, sind wir auch im Stande, die durch Entladung einer Batterie zum Vorschein kommende lebendige Kraft genauer auszudrücken (vergl. § 32). Diese ist nämlich gleich

$$\frac{F}{d} \frac{m \operatorname{tg} \varphi}{8 \pi \varrho^2 f\left(\frac{s}{\varrho}\right)}.$$

Hierbei bedeutet f die durch obige Tabelle für die Abstossung zweier Kugeln ausgedrückte Function, F die belegte Fläche, die jedoch nur einmal gerechnet werden darf, d die Dicke der isolirenden Schicht, m das Gewicht einer Elektroskopkugel, φ den halben Winkelabstand der Elektroskopkugeln und ϱ den Radius derselben. Als Längeneinheit gilt der Decimeter und als Gewichtseinheit das Kilogramm. In Wärmeinheiten ausgedrückt, ist diese lebendige Kraft:

$$\frac{F}{d} \frac{m \operatorname{tg} \varphi}{4240 \cdot 8 \pi \varrho^2 f\left(\frac{s}{\varrho}\right)}.$$

§ 47.

Das Problem des vorigen Paragraphen in seiner allgemeinen Fassung.

Will man die Aufgabe, die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugeln zu bestimmen, allgemein lösen für zwei Kugeln, deren Radien R und R' sind, so hat man:

$$\begin{aligned} q_{2n} &= \frac{q_{2n-1} R}{s - q_{2n-1}}, & q_{2n} &= \frac{R^2}{s - q_{2n-1}}, \\ q_{2n+1} &= \frac{q_{2n} R'}{s - q_{2n}}, & q_{2n+1} &= \frac{R'^2}{s - q_{2n}}, \\ q_{2n+1} &= \frac{R' q_{2n+1}}{q_{2n}}, & q_{2n} &= \frac{R q_{2n}}{q_{2n-1}}. \end{aligned}$$

Setzt man ferner, wie im vorigen Paragraphen $q_{2n} = \frac{1}{s_{2n}}$ u. s. f., so hat man:

$$s_{2n} = \frac{s \cdot s_{2n-1} - R' s_{2n-2}}{R}, \quad s_{2n+1} = \frac{s \cdot s_{2n} - R \cdot s_{2n-1}}{R'}.$$

Berühren sich die beiden Kugeln, so ist $s = R + R'$ und man hat:

$$s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{R'}{R} (s_{2n-1} - s_{2n-2}); \quad s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{R}{R'} (s_{2n} - s_{2n-1}).$$

Da nun $s_0 = \frac{1}{q_0} = \frac{1}{R}$ ist, so findet man leicht die Regel:

$$s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{R}; \quad s_{2n-1} - s_{2n-2} = \frac{1}{R},$$

und durch Addition dieser successive gebildeten Gleichungen:

$$s_{2n} = \frac{n}{R} + \frac{n+1}{R}, \quad s_{2n-1} = \frac{n}{R} + \frac{n}{R},$$

$$q_{2n} = \frac{RR'}{nR + (n+1)R'}, \quad q_{2n-1} = \frac{RR'}{n(R+R')}.$$

Berechnet man hiernach die Quantitäten der auf beiden Kugeln angesammelten Elektricität, wenn beide bis zum Niveau 1 elektrisirt sind, so hat man für die Kugel vom Radius R :

$$Q = \frac{R^2 R'}{s} \left[\frac{1}{R'} + \frac{1}{2(R+2R')} + \frac{1}{3(R+3R')} \cdots \right],$$

und für die andere:

$$Q' = \frac{R'^2 R}{s} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2(R'+2R)} + \frac{1}{3(R'+3R)} \cdots \right].$$

Ist R' gegen R sehr klein, so hat man:

$$Q = \frac{R^2}{s}, \quad Q' = \frac{R'^2}{s} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Schliesslich sei noch erwähnt, dass sich die Entfernungen q_m , wie man aus obigen Formeln sieht, leicht durch Kettenbrüche darstellen lassen.

§ 48.

Theorie des inducirten Magnetismus nach Poisson.

Wir haben bereits oben in § 13 erfahren, welche Vorstellung man sich von der Art macht, wie der Magnetismus im Eisen erregt (inducirt) wird. Hieraus ergiebt sich für die Analysis die Aufgabe, die Potentialfunction eines beliebigen magnetisirbaren Körpers zu finden, wenn er unter dem Einflusse von magnetischen Kräften steht.

Nach der hier mit einigen Veränderungen und Abkürzungen gegebenen Darstellung Poisson's wird diese Aufgabe in folgender Weise gelöst.

Die Potentialfunction eines magnetischen Moleculs in der Ferne ist:

$$\frac{\alpha a' + \beta b' + \gamma c'}{r^2}.$$

Setzt man $\alpha = v\alpha$, $\beta = v\beta$, $\gamma = v\gamma$, wobei v das Volumen eines Atoms bedeutet; bezeichnet man ferner mit X , Y , Z die Kräfte des magnetisirten Körpers und mit V die inducirende Function, so hat man im Innern eines Atoms:

$$\frac{dV}{da} + X + \alpha_1 = 0,$$

wenn man mit α_1 die Kraft bezeichnet, welche das Atom selbst vermöge der an seiner Oberfläche befindlichen magnetischen Masse im Innern ausübt. Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, setzen wir voraus, dass die Atome Kugeln seien vom Radius ϱ , alsdann ist ihr Volumen gleich $\frac{4\pi\varrho^3}{3}$ und ihre Wirkung nach aussen wird dargestellt durch:

$$\frac{4\pi\varrho^3}{3} \left(\frac{\alpha a' + \beta b' + \gamma c'}{r^2} \right),$$

folglich ihre Wirkung nach innen durch:

$$\frac{4\pi}{3} (\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

es ist also:

$$\alpha_1 = \frac{4\pi\alpha}{3}.$$

Wir haben somit im Innern eines Atoms:

$$a) \quad \frac{dV}{da} + X + \frac{4\pi\alpha}{3} = 0.$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten des Centrums eines beliebigen Atoms durch x , y , z , die Coordinaten des bestimmten Atoms, innerhalb dessen wir die Kräfte bestimmen wollen, durch a , b , c , so ist die Kraft, welche vom Atom x , y , z auf letzteres Atom in der Richtung α wirkt, gleich:

$$\alpha \frac{d}{da} \left(\frac{a'}{r^2} \right) + \beta \frac{d}{da} \left(\frac{b'}{r^2} \right) + \gamma \frac{d}{da} \left(\frac{c'}{r^2} \right),$$

oder da $\frac{a'}{r^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right)$ und $\frac{d}{da} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right)$ ist, gleich:

$$-\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \beta \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{1}{r} \right) - \gamma \frac{d^2}{dx dz} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Beschreibt man nun um a , b , c eine Kugelfläche, deren Radius gegen die Dimensionen des inducirten Körpers verschwindet, gegen den aber

wiederum die Dimensionen eines Kugelatoms verschwinden, und nimmt man an, dass alle innerhalb dieser Kugelfläche gelegenen Atome auf das im Centrum befindliche keine Kraft ausüben, so hat man:

$$X = -\kappa \int \left[\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \beta \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{1}{r} \right) + \gamma \frac{d^2}{dx dz} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

über den ganzen Raum des inducirten Körpers mit Ausnahme der kleinen Kugel integrirt. Hierbei bedeutet κ den Bruchtheil des ganzen inducirten Körpers, welcher durch die Kugelatome ausgefüllt wird. Nun ist:

$$\int \alpha \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{r} \right) dv = \int \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) \cos(nx) d\sigma - \int \frac{d\alpha}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right) dv + \frac{4\pi\alpha}{3}$$

(vergl. über die Integrationsmethode § 17), und die erste Integration rechts erstreckt sich nur noch über die Oberfläche des inducirten Raumes, die zweite aber darf man über den ganzen Raum erstrecken, da das zweite Integral innerhalb der kleinen Kugel verschwindet. Durch diese Rechnungsoperationen haben wir bewirkt, dass die Integrationsgrenzen nicht mehr von den Coordinaten a, b, c abhängen; wir haben daher:

$$\int \alpha \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{r} \right) dv = -\frac{d}{da} \int \alpha \cos(nx) \frac{d\sigma}{r} + \frac{d}{da} \int \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{1}{r} dv + \frac{4\pi\alpha}{3}.$$

Nach derselben Methode findet man:

$$\int \beta \frac{d^2}{dx dy} \left(\frac{1}{r} \right) dv = -\frac{d}{da} \int \beta \cos(ny) \frac{d\sigma}{r} + \frac{d}{da} \int \frac{d\beta}{dy} \cdot \frac{1}{r} dv,$$

$$\int \gamma \frac{d^2}{dx dz} \left(\frac{1}{r} \right) dv = -\frac{d}{da} \int \gamma \cos(nz) \frac{d\sigma}{r} + \frac{d}{da} \int \frac{d\gamma}{dz} \cdot \frac{1}{r} dv,$$

und hat daher endlich, wenn man den gefundenen Ausdruck für X in a) substituirt:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} + \kappa \frac{d}{da} \int [\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz)] \frac{d\sigma}{r} + \frac{4\pi\alpha}{3} (1 - \kappa) \\ - \kappa \frac{d}{da} \int \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \frac{dv}{r} = 0 \end{aligned}$$

und zwei analoge Gleichungen für die Richtungen b und c . Hieraus sieht man, dass

$$\alpha = \frac{d\varphi}{da}, \quad \beta = \frac{d\varphi}{db}, \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dc},$$

wodurch sich die vorige Gleichung reducirt auf:

$$V + \kappa \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r} - \kappa \int \Delta^2 \varphi \frac{d\sigma}{r} + \frac{4\pi}{3} (1 - \kappa) \varphi = 0,$$

und hieraus folgt ferner: $\Delta^2 \varphi = 0$, so dass man schliesslich hat:

$$b) \quad V + \kappa \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \frac{4\pi}{3} (1 - \kappa) \varphi = 0,$$

und die Wirkung des inducirten Körpers nach aussen ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$c) \quad Q = \kappa \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r}.$$

§ 49.

Wesentliche Lücke dieser Theorie.

Diese Entwicklung Poisson's beruht, wie wir gesehen haben, auf der Voraussetzung, dass die regelmässig um ein Atom gelagerten übrigen Atome auf dasselbe gar keine oder doch nur eine verschwindend kleine Wirkung ausüben. Diese Voraussetzung ist aber durch Nichts bewiesen. Bei der gewöhnlichen Newton'schen Attraction darf man allerdings die Wirkung der zunächst gelegenen Atome vernachlässigen; denn die kleine Kugel vom Radius ϱ , deren Masse $\frac{4\pi\varrho^3}{3}$ ist, übt in der

Entfernung ϱ' die Kraft $\frac{4\pi\varrho^3}{3\varrho'^2}$ aus, welche immer verschwindet, wenn ϱ gleich Null wird, weil ja ϱ' immer grösser ist als ϱ ; dagegen übt das magnetische Element vom Radius ϱ , dessen Potentialfunction gleich $\frac{4\pi\varrho^3}{3} \frac{a'}{r^2}$, in der Richtung a z. B. die Kraft $4\pi\varrho^3 \cdot \frac{a'^2 - \frac{1}{3}}{r^3}$ aus, die in nächster Nähe keineswegs verschwindet, sondern endlich wird. Es können also die um ein Atom herumliegenden Punkte, auch wenn sie regelmässig gruppirt sind, dennoch eine Kraft auf dieses ausüben, die nicht bloß merklich ist, sondern auch innerhalb desselben veränderlich sein wird.

In Folge der Induction sammelt sich auf der Oberfläche jedes Atoms eine gewisse Menge freien Magnetismus, dessen Dichtigkeit sich jedenfalls in Kugelfunctionen auflösen lässt und demgemäss lautet:

$$4\pi s = 3S_1 + 5S_2 + 7S_3 \dots$$

Die dieser Dichtigkeit entsprechende Potentialfunction ist
auf der Oberfläche:

$$\varrho (S_1 + S_2 + S_3 \dots),$$

innerhalb:

$$r S_1 + \frac{r^2}{\varrho} S_2 + \frac{r^2}{\varrho^2} S_3 \dots,$$

ausserhalb:

$$\frac{\varrho^3 S_1}{r^2} + \frac{\varrho^4 S_2}{r^3} + \frac{\varrho^5 S_3}{r^4} \dots,$$

und die Functionen $S_1 S_2 \dots$ hängen sowohl von den Coordinaten des Atoms, als von den Richtungen ab, welche vom Centrum desselben ausgehen. Löst man die allgemeinen Ausdrücke für S in die einzelnen Kugelfunctionen auf, so hat man:

$$S_1 = C_a K_a + C_b K_b + C_c K_c,$$

$$S_2 = C_{a^2} K_{a^2} + C_{b^2} K_{b^2} + C_{ab} K_{ab} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

wobei die Ausdrücke K die gewöhnlichen Kugelfunctionen der Richtungscosinus und die Ausdrücke C dazu gehörige Coefficienten bezeichnen, welche von den Coordinaten des betreffenden Atoms abhängen. Die Coefficienten C bestimmen wir nun auf folgende Weise.

Haben wir zwei Centra p und p_1 und sind die Coordinaten von p auf p_1 bezogen gleich l, m, n und $t = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$; wirkt ferner im Punkt p die Potentialfunction $\frac{K a^l b^m c^n}{r^{s+1}}$, so ist diese Potentialfunction auf das Centrum p_1 reducirt, gleich:

$$(-1)^s \left\{ \begin{aligned} & \frac{K l^p m^q n^r}{t^{s+1}} \\ & + \frac{2s+1}{t^{s+2}} (K l^{p+1} m^q n^r \cdot a + K l^p m^{q+1} n^r \cdot b + K l^p m^q n^{r+1} \cdot c) \\ & + \frac{(2s+1)(2s+3)}{1 \cdot 2 t^{s+3}} (K l^{p+2} m^q n^r \cdot a^2 + 2 K l^{p+1} m^{q+1} n^r \cdot a b + \dots) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}.$$

Die Potentialfunction

$$\frac{C_a K_a + C_b K_b + C_c K_c}{r^2} + \frac{C_{a^2} K_{a^2} + C_{b^2} K_{b^2} \dots}{r^3} + \dots$$

lautet daher vom Punkte p in den Punkt p_1 transformirt:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{C_a K_l + C_b K_m + C_c K_n}{t^2} + \frac{C_{a^2} K_{l^2} + C_{b^2} K_{m^2} \dots}{t^3} - \dots \right) \\
& + a \left(-3 \cdot \frac{C_a K_{l^2} + C_b K_{lm} + C_c K_{ln}}{t^3} + 5 \cdot \frac{C_{a^2} K_{l^3} + C_{b^2} K_{lm^2} \dots}{t^4} - \dots \right) \\
& \dots \dots \dots \\
& + \frac{a^2}{1 \cdot 2} \left(-3 \cdot 5 \cdot \frac{C_a K_{l^3} + C_b K_{l^2 m} + C_c K_{l^2 n}}{t^4} + 5 \cdot 7 \cdot \frac{C_{a^2} K_{l^4} \dots}{t^5} - \dots \right) \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

(Ueber die hier angewendete Rechnungsmethode vergl. § 26 über die Kugelfunctionen und § 41.)

Nun besteht die im Innern eines Atoms herrschende Potentialfunction aus drei Theilen: demjenigen Theil, welcher von den übrigen Atomen herrührt, demjenigen, welcher vom Atom selbst herrührt, und dem, welcher der inducirenden Function V angehört. Die der Potentialfunction V angehörende Kraft kann man innerhalb eines Atoms constant ansehen und hat daher für V im Innern des Atoms:

$$V_1 + \frac{dV}{da} \cdot a + \frac{dV}{db} \cdot b + \frac{dV}{dc} \cdot c.$$

Die Potentialfunction des Atoms selbst ist in seinem Innern:

$$a C_a + b C_b + c C_c + (a^2 - \frac{1}{3} r^2) \frac{C_{a^2}}{\rho} + (b^2 - \frac{1}{3} r^2) \frac{C_{b^2}}{\rho} \dots$$

Im Innern eines Atoms ist die Potentialfunction constant; man hat somit, indem man alle zu a gehörigen Coefficienten gleich Null setzt:

$$\text{a) } \left\{ \begin{aligned} 0 &= C_a + \frac{dV}{da}, \\ &- 3 \sum \frac{\rho^3}{t^3} (C_a K_{l^2} + C_b K_{lm} + C_c K_{ln}) \\ &+ 5 \sum \frac{\rho^4}{t^4} (C_{a^2} K_{l^3} + C_{b^2} K_{lm^2} \dots) \\ &- 7 \sum \frac{\rho^5}{t^5} (C_{a^3} K_{l^4} + C_{ab^2} K_{l^2 m^2} \dots) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Setzt man auch die zu b und c , a^2 , b^2 ... gehörigen Coefficienten gleich Null, so erhält man eine weitere Anzahl von ähnlichen Gleichungen. Bevor wir diese letzteren in Betracht ziehen, wollen wir die hier auftretenden Summen etwas näher betrachten. Beschreibt man nämlich um das angegriffene Atom eine Kugel vom Radius R , welcher so gross ist, dass diese Kugel eine sehr grosse Anzahl von Kugeln umfasst,

jedoch so klein, dass innerhalb derselben die Coefficienten C als constant angesehen werden dürfen, so werden ausserhalb dieser Kugel die Summen zu Integralen.

Nun ist, wenn man dem Coefficienten κ dieselbe Bedeutung beilegt, wie im vorigen Paragraphen:

$$\sum \frac{4\pi \varrho^3}{3} = \kappa \int dv,$$

also:

$$\varrho^3 = \frac{3\kappa dx dy dz}{4\pi},$$

es werden also alle Summen ausserhalb der Kugel vom Radius R in obiger Gleichung a) mit Ausnahme der ersten gleich Null (vergl. die Beweisführung in § 17). Sind ferner die Kugeln so angeordnet, dass die Anordnung stets dieselbe bleibt, wenn man auch die drei Coordinatenachsen wechselt, so hat man:

$$\sum l'^2 = \sum m'^2 = \sum n'^2 \\ \text{u. s. f.}$$

Ferner werden alle Summen von Producten der Potenzen von l' , m' , n' gleich Null, wenn nur eine der Potenzen ungerade ist, und endlich ist:

$$\sum K_{l^2} = \sum K_{m^2} = \sum K_{n^2} = 0.$$

Innerhalb der Kugel vom Radius R verschwindet also die erste Summe und man hat:

$$\begin{aligned} 0 = & C_a + \frac{dV}{da} - \frac{9\kappa}{4\pi} \int \frac{C_a K_{l^2} + C_b K_{lm} + C_c K_{ln}}{t^3} dx dy dz \\ & - 7 \left(C_{a^3} \sum \frac{\varrho^5}{t^5} K_{l^4} + C_{ab^2} \sum \frac{\varrho^5}{t^5} K_{l^2 m^2} \right) \\ & - 11 \left(C_{a^5} \sum \frac{\varrho^7}{t^7} K_{l^6} + C_{a^3 b^2} \sum \frac{\varrho^7}{t^7} K_{l^4 m^2} + C_{ab^4} \sum \frac{\varrho^7}{t^7} K_{l^2 m^4} \right) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich noch einfacher gestalten. Man sieht nämlich leicht ein, dass die Ausdrücke $\sum \frac{\varrho^5}{t^5} K_{l^4}$ u. s. f. nur von der Art und Weise abhängen, wie die Kugeln im Raume angeordnet und mit welcher Dichtigkeit sie gelagert sind. Die dichteste Lagerung ist die, bei welcher sich alle Kugeln berühren. Bezeichnet man nun bei der dichtesten Lagerung $\sum \frac{\varrho^5}{t^5} K_{l^4}$ u. s. f. einfach durch S_4 u. s. f. und

ist q ein echter Bruch, welcher das Verhältniss des Abstandes zweier Kugeln im Zustande der wirklichen Dichtigkeit und im Zustande der grössten Dichtigkeit andeutet, so haben wir, wenn wir noch schliesslich in Betracht ziehen, dass $S_{400} = S_{040}$, $S_{202} = S_{220}$ u. s. f. sein muss:

$$b) \left\{ \begin{array}{l} 0 = C_a + \frac{dV}{da} \\ - 3 \cdot \frac{3\pi}{4\pi} \int \frac{C_a K_{l^2} + C_b K_{lm} + C_c K_{ln}}{t^3} \cdot dx dy dz \\ - 7 q^5 (C_{a^3} S_4 + C_{ab^2} S_{220}) \\ - 11 q^7 (C_{a^5} S_6 + C_{a^3 b^2} S_{42} + C_{ab^4} S_{42}) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

nebst zwei analogen Gleichungen für C_b und C_c .

§ 50.

Der inducirte Magnetismus ist von der Gruppierung der magnetischen Atome abhängig.

Wir setzen nun auch alle Coefficienten von a^3 und ab^2 gleich Null und haben, wenn wir berücksichtigen, dass

$$r^3 K_{a^3} = a^3 - \frac{3a}{5} (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$r^3 K_{ab^2} = ab^2 - \frac{1}{5} a (a^2 + b^2 + c^2),$$

folgendes Resultat:

$$\frac{2}{5} C_{a^3} - \frac{1}{5} C_{ab^2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^5 C_a S_4 + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^7 (C_{a^3} S_6 + C_{ab^2} S_{42}) \dots,$$

$$\frac{4}{5} C_{ab^2} - \frac{3}{5} C_{a^3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2} q^5 C_a S_{22} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2} q^7 (C_{ab^2} S_{42} + C_{a^3} S_{42}) \dots$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man C_{a^3} , C_{ab^2} durch C_a und eine unendliche convergente Reihe von anderen Coefficienten ausdrücken, welche mit der 9^{ten} Dimension von q und mit C_{a^5} beginnen. Aehnliche Gleichungen erhält man für die Coefficienten C_{a^5} , $C_{a^3 b^2}$, C_{ab^4} , mit Hülfe deren man diese ebenfalls durch C_a und noch höhere Coefficienten auszudrücken im Stande ist, so dass schliesslich die Gleichung a) des vorigen Paragraphen, wenn man unter d einen Coefficienten versteht, welcher blos von der Art und Dichtigkeit der Anordnung der Kugeln abhängt, folgendermassen lautet:

$$a) \quad (1-d) C_a + \frac{dV}{da} - 3 \cdot \frac{3\kappa}{4\pi} \int \frac{C_a K_{l^2} + C_b K_{lm} + C_c K_{ln}}{t^3} dx dy dz = 0,$$

und bei dieser Gleichung hat man es nur mit stetigen Functionen und Integralen zu thun. Es bedeutet nämlich C_a die Projection des magnetischen Moments eines Atoms auf die X-Achse. Bezeichnet man nun ferner mit a, b, c die Coordinaten des Atoms, welches unter dem Integralzeichen fest ist, mit x, y, z die Coordinaten der Atome, welche unter dem Integralzeichen summirt werden, so ist:

$$\frac{3 C_a K_{l^2}}{t^3} = C_x \frac{d^2}{dx^2} [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-\frac{1}{2}} = C_x \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Die weitere Rechnung ist dieselbe, wie im vorigen Paragraphen. Man hat daher schliesslich:

$$b) \quad (1-d-\kappa) \varphi + V + \frac{3\kappa}{4\pi} \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r} = 0,$$

welche Gleichung mit Ausnahme des Ausdrucks d mit der Gleichung § 48 b) übereinstimmt, da φ mit einem beliebigen Coefficienten multiplicirt werden darf. Greift man auf die Entwicklungen des § 20 zurück, so findet man, dass b) auch in folgender Form gegeben werden kann:

$$c) \quad (1-d+2\kappa) \varphi + V - \frac{3\kappa}{4\pi} \int \varphi d\omega = 0.$$

Die Potentialfunction des inducirten Körpers nach aussen ist:

$$d) \quad Q = \frac{3\kappa}{4\pi} \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r} \text{ oder: } -\frac{3\kappa}{4\pi} \int \varphi d\omega.$$

Die zweite Form von Q bedeutet die Potentialfunction einer über die ganze Oberfläche des inducirten Körpers verbreiteten magnetischen Schicht von der Stärke $\frac{3\kappa}{4\pi} \varphi$ (vergl. § 22).

Endlich ist überall im Innern des inducirten Körpers:

$$e) \quad \Delta^2 \varphi = 0.$$

Die Function φ lässt sich auch in eine nach den Potenzen von κ fortschreitende Reihe verwandeln. Man hat nämlich aus b):

$$\varphi = -\frac{V}{(1-d-\kappa)} - \frac{3\kappa}{4\pi(1-d-\kappa)} \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r}.$$

Wenn man diesen aus b) folgenden Ausdruck in b) selbst einsetzt, erhält man:

$$f) \left\{ \begin{aligned} \varphi = & -\frac{V}{(1-d-\kappa)} + \frac{3\kappa}{4\pi(1-d-\kappa)^2} \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} \\ & + \frac{(3\kappa)^2}{(4\pi)^2(1-d-\kappa)^2} \int \frac{d\sigma}{r} \cdot \frac{d}{dn} \int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r} \end{aligned} \right.$$

Diesen Ausdruck kann man nun wieder in b) substituieren und hat schliesslich unter der Bedingung, dass der Rest gleich Null wird, wenn man weit genug entwickelt:

$$g) \left\{ \begin{aligned} Q = & -\alpha \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + \alpha^2 \int \frac{d\sigma}{r} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} \\ & - \alpha^3 \int \frac{d\sigma}{r} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{d}{dn} \int \frac{d\sigma}{r} \frac{dV}{dn} \\ & + \dots \end{aligned} \right.$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\alpha = \frac{3\kappa}{4\pi(1-d-\kappa)}.$$

§ 51.

Betrachtungen über die Gruppierung der Atome und die davon abhängigen Constanten in den Gleichungen des § 50.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, welche Werthe d und κ für bestimmte Arten von Anordnungen der Kugeln annehmen. Die natürlichste und zugleich dichteste Schichtung von Kugeln ist die, welche man bei Kanonenkugeln in Zeughäusern sieht. Bei dieser Anordnung von Kugeln wird jede von zwölf anderen Kugeln berührt (Fig. 7 und Fig. 8). In der letzteren Stellung sind die Coordinaten der zwölf nächstgelegenen Punkte, wenn man die Entfernung der beiden nächstgelegenen Punkte gleich $\sqrt{2}$ setzt:

Fig. 7.

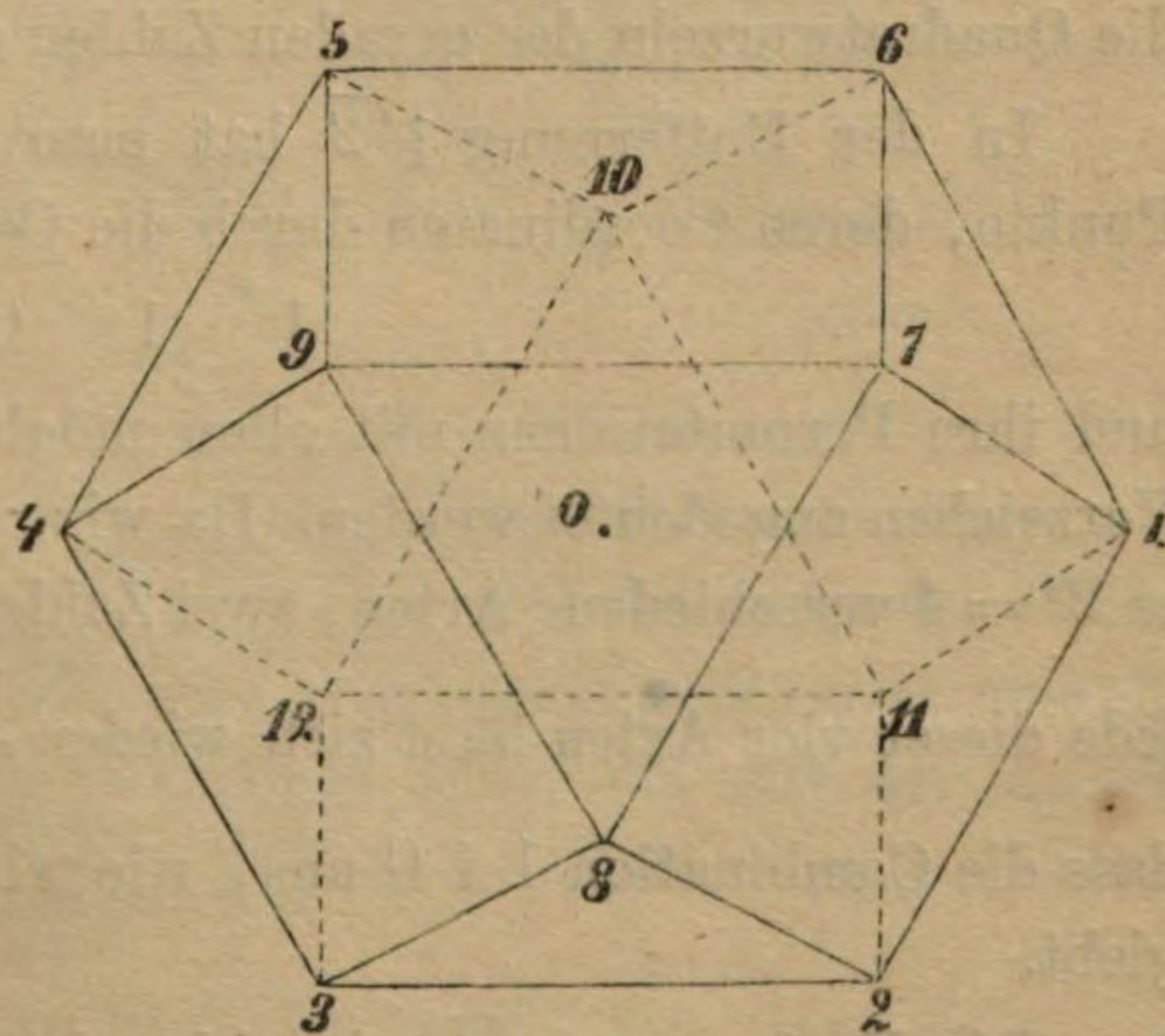
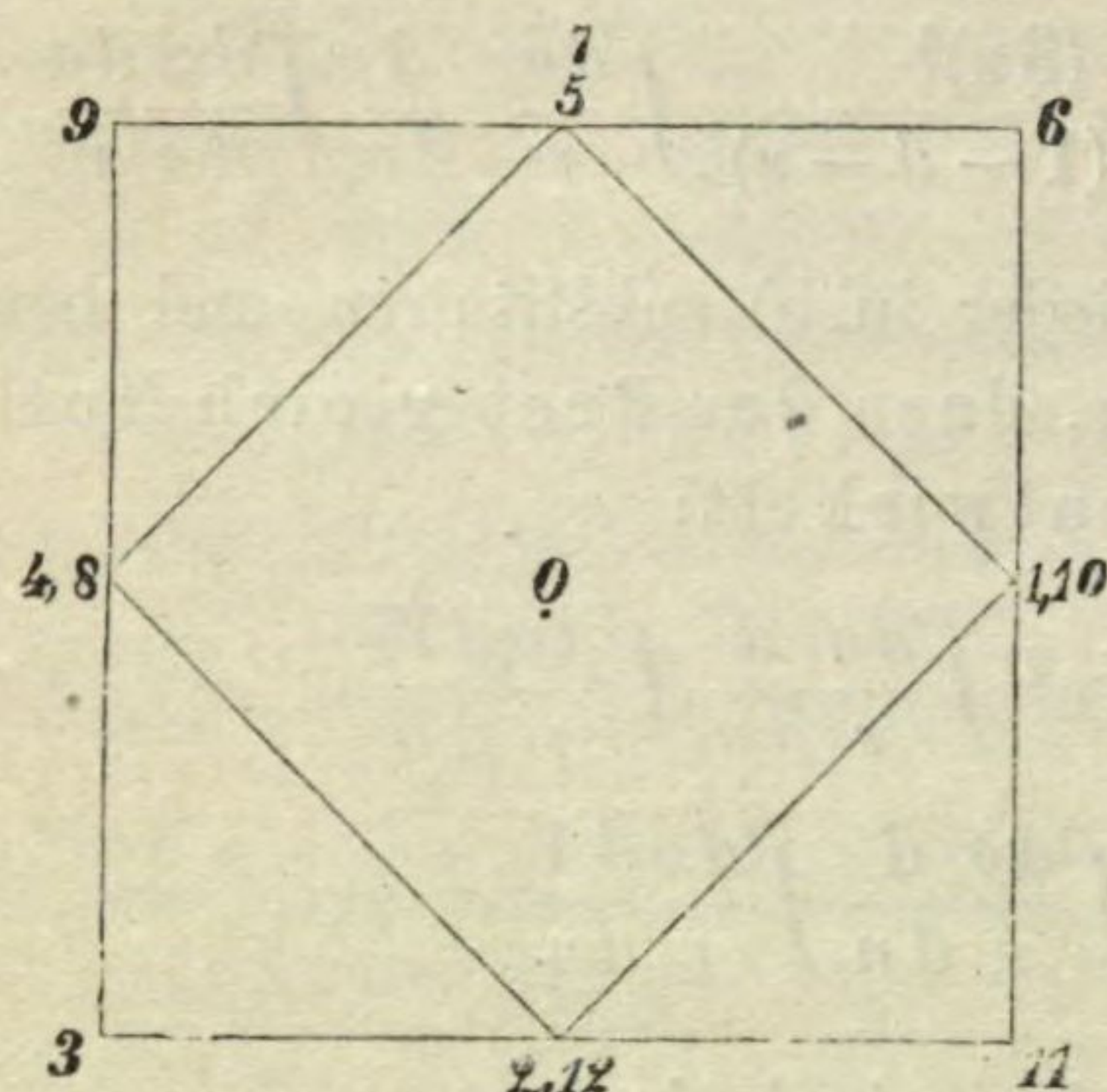


Fig. 8.



x	y	z
+1	+1	0
+1	0	+1
0	+1	+1
+1	-1	0
+1	0	-1
0	+1	-1

x	y	z
-1	-1	1
-1	0	-1
0	-1	-1
-1	+1	0
-1	0	+1
0	-1	+1

Von irgend einem dieser zwölf Punkte ausgehend, kann man die Coordinaten von zwölf weiteren Punkten finden und so weiter fortfahren, so dass die Coordinaten aller möglichen Kugelcentra in den allgemeinen Formen enthalten sind:

$$x = m + n + q + s, \quad y = m + p - q - t, \quad z = n + p - s - t,$$

wobei $m, n \dots$ alle möglichen positiven oder negativen ganzen Zahlen bedeuten. Durch Addition findet man, dass $x + y + z$ eine gerade Zahl sein muss; im Uebrigen sind die Coordinaten ganz beliebig. Ist die Summe der drei Coordinaten x, y, z eine gerade Zahl, so muss auch die Summe ihrer Quadrate eine gerade Zahl sein, und man sieht hieraus, dass die Entfernungen aller Kugeln von einer derselben durch die Quadratwurzeln der geraden Zahlen ausgedrückt werden.

In der Entfernung $\sqrt{2}$ hat man, wie bereits bekannt, zwölf Punkte, deren Coordinaten durch die Combination

$$1 \quad 1 \quad 0$$

und ihre Permutationen mit allen möglichen positiven und negativen Vorzeichen angedeutet werden. Da wir zwei Vorzeichen haben, so giebt es $2^2 = 4$ verschiedene Arten, zwei Zahlen mit Vorzeichen zu versehen; jede dieser vier Arten lässt sich wieder $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$ mal permutiren, so dass die Combination 1 1 0 uns, wie wir bereits wissen, zwölf Punkte giebt.

Die Entfernung $\sqrt{4}$ wird blos durch die Combination 2 0 0 gegeben, welche sich in sechs Punkte auflösen lässt; denn 2 0 0 lässt

sich 3mal permutiren und jede der drei Permutationen 2mal in verschiedener Weise mit Vorzeichen versehen. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir nachstehende Tabelle:

Entfernung:	Combination:	Anzahl der Punkte:
$\sqrt{2}$	1 1 0	12
$\sqrt{4}$	2 0 0	6
$\sqrt{6}$	2 1 1	24
$\sqrt{8}$	2 2 0	12
$\sqrt{10}$	3 1 0	24
$\sqrt{12}$	2 2 2	8
$\sqrt{14}$	3 2 1	48
$\sqrt{16}$	4 0 0	6
$\sqrt{18}$	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \ 3 \ 0 \\ 4 \ 1 \ 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 24 \end{array} \right.$

Ferner hat man:

Entfernung:	$\Sigma 1$	$\Sigma x'^2$	$\Sigma x'^4$	$\Sigma x'^6$	$\Sigma x'^8$
$\sqrt{2}$	12	4	2	1	0.5
$\sqrt{4}$	6	2	2	2	2
$\sqrt{6}$	24	8	4	$\frac{22}{9}$	$\frac{127}{81}$
$\sqrt{8}$	12	4	2	1	0.5
$\sqrt{10}$	24	8	6.56	6.04	$\frac{3281}{625}$
$\sqrt{12}$	8	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{27}$	.
$\sqrt{14}$	48	16	8	$\frac{1588}{343}$	.
$\sqrt{16}$	6	2	2	2	.
$\sqrt{18}$	36	12	$\frac{226}{27}$	.	.
$\sqrt{20}$	24	8	5.44	.	.
$\sqrt{22}$	24	8	$\frac{356}{121}$	.	.

Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die Ausdrücke $S_4 S_{22}$ u. s. f. leicht berechnen, wobei noch folgende Betrachtung eine wesentliche Erleichterung gewährt. Da die Kugeln so gelagert sind, dass man die drei Coordinatenachsen vertauschen kann, ohne die Art der Anordnung zu verändern, so hat man: $\Sigma K_{x^2 y^2} = \Sigma K_{x^2 z^2}$ u. s. f. Nun ist, weil $\frac{d^2 r^{-1}}{dz^2} = -\frac{d^2 r^{-1}}{dx^2} - \frac{d^2 r^{-1}}{dy^2}$:

$$\Sigma K_{x^2 z^2} = -\Sigma K_{x^4} - \Sigma K_{x^2 y^2} = \Sigma K_{x^2 y^2}.$$

Man hat daher:

$$S_{22} = -\frac{1}{2} S_4.$$

Durch fortgesetzte Anwendung der Regel: $\frac{d^2}{dz^2} = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2}$ erhält man:

$$S_{2m-4,4} = S_{2m} + 2 S_{2m-2,2} + S_{2m-4,4}$$

oder:

$$0 = S_{2m} + 2 S_{2m-2,2},$$

$$0 = S_{2m} + 4 S_{2m-2,2} + 6 S_{2m-4,4} + 4 S_{2m-6,6}$$

.

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man leicht:

$$S_{2,2} = -\frac{1}{2} S_4; \quad S_{4,2} = -\frac{1}{2} S_6; \quad S_{6,2} = -\frac{1}{2} S_8; \quad S_{4,4} = -\frac{1}{2} S_8.$$

Aus der oben gegebenen Tabelle berechnet man nun mit Hülfe der Kugelfunctionen:

$$S_4 = -0,0094 \dots, \quad S_6 = -0,00125 \dots$$

Schliesslich bleibt noch übrig, κ durch q auszudrücken. Denken wir uns ein Tetraeder aus Kugeln aufgebaut, die sich berühren und liegen an einer Seite desselben n Kugeln, so ist die Anzahl aller Kugeln $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, was man bei einer sehr grossen Anzahl von Kugeln

gleich $\frac{n^3}{6}$ setzen kann. Ist nun der Radius einer Kugel gleich 1, so ist

der gesammte durch die Kugeln ausgefüllte Raum gleich $\frac{2\pi n^3}{9}$. Der

ganze Raum des Tetraeders ist gleich $8n^3$ mal dem Raum eines Tetra-

eders von der Seite 1, d. i. gleich $8n^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$; es ist also:

$$\kappa = \frac{\pi q^3}{3\sqrt{2}} = 0,7407 q^3.$$

Die Bestimmung des Coefficienten d hat keine Schwierigkeit, wenn man sich auf wenige Glieder beschränkt. Aus den Gleichungen im Anfang des § 50 erhält man nämlich, wenn man berücksichtigt, dass $S_{22} = -\frac{1}{2} S_4$ u. s. f.:

$$\frac{2}{5} (C_{a^3} - \frac{1}{2} C_{ab^2}) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^5 S_4 C_a + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^7 S_6 (C_{a^3} - \frac{1}{2} C_{ab^2}) \dots,$$

und wenn man hieraus $C_{a^3} - \frac{1}{2} C_{ab^2}$ berechnet und in die Gleichung § 49 b) substituirt, so hat man:

$$C_a \left(1 - \kappa - q^{10} S_4^2 \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{12 - 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 q^7 S_6} \right) - 11 q^7 S_6 \left(C_{a^5} - \frac{C_{a^3 b^2}}{2} - \frac{C_{ab^4}}{2} \right).$$

.

Nun ist $C_{a^5} - \frac{C_{a^3 b^2}}{2} - \frac{C_{ab^4}}{2}$ von der Dimension q^7 . Wenn man also alle höheren Dimensionen von q^{14} an vernachlässigt, so hat man:

$$d = 0,027 q^{10}.$$

§ 52.

Der inducirte Magnetismus der Kugel.

Da φ innerhalb des ganzen inducirten Körpers die Gleichung $\Delta^2 \varphi = 0$ erfüllt, so lässt es sich ausdrücken durch:

$$\varphi_0 + r \varphi_1 + r^2 \varphi_2 \dots$$

Ist nun der inducirte Körper eine Kugel vom Radius 1, so hat man:

$$\int \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\sigma}{r} = 4\pi \left(r \frac{\varphi_1}{3} + 2r^2 \frac{\varphi_2}{5} + 3r^3 \frac{\varphi_3}{7} \dots \right),$$

also:

$$(1 - \kappa - d) (\varphi_0 + r \varphi_1 + r^2 \varphi_2 \dots) + \kappa \left(r \varphi_1 + \frac{3 \cdot 2 r^2 \varphi_2}{5} + \frac{3 \cdot 3 r^3 \varphi_3}{7} \dots \right) + V_0 + r V_1 + r^2 V_2 \dots = 0,$$

und hieraus:

$$\varphi_1 (1 - d) + V_1 = 0,$$

$$\varphi_2 \left(1 - d + \frac{\kappa}{5} \right) + V_2 = 0,$$

$$\varphi_3 \left(1 - d + \frac{2\kappa}{7} \right) + V_3 = 0$$

.

Die Wirkung des in der Kugel inducirten Magnetismus nach aussen ist endlich:

$$-\kappa \left[\frac{V_1}{1-d} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{6 V_2}{(5-5d+\kappa)} \cdot \frac{1}{r^3} \dots \right].$$

Sind die wirkenden Massen im Verhältniss zur inducirten Kugel an Ausdehnung sehr gross oder sehr weit entfernt, so kann man innerhalb der inducirten Kugel die inducirende Kraft constant annehmen;

es verschwinden dann alle höheren Kugelfunctionen von V und man hat für die Wirkung nach aussen, wenn die inducirende Kraft gleich 1 ist und in der Richtung der X -Achse wirkt:

$$Q = - \frac{x a'}{(1-d) r^2}.$$

Die ganze Kugel wirkt also wie ein magnetisches Element, welches im Mittelpunkt derselben liegt.

Aus dieser Gleichung sieht man auch, dass der Coefficient d höchstens gleich 1 werden kann; denn ausserdem müsste ja bei wachsender Annäherung der Kugelatome ein Zeitpunkt eintreten, in welchem der inducirte Magnetismus durch's Unendliche durch zum Negativen übergeht. Es fragt sich nur noch, ob der inducirte Magnetismus überhaupt unendlich werden kann, wenn man die Kugeln bis zur Berührung nähert. Hat man zwei sich berührende Kugeln, so ist das entschieden der Fall. Denn ihr Niveau muss immer ungleich sein, wenn eine inducirende Function auf sie einwirkt. Ist aber das Niveau ungleich, so ist die Dichtigkeit an den Berührungspunkten unendlich und zwar auf der einen Kugel positiv, auf der andern negativ. Die Potentialfunction der auf der ersten Kugel angesammelten Masse wird daher im Centrum der zweiten Kugel positiv unendlich und die Potentialfunction der auf der zweiten Kugel angesammelten Masse im Centrum der ersten Kugel negativ unendlich, und da nun die Potentialfunction der auf jeder einzelnen Kugel befindlichen Masse in ihrem eigenen Centrum gleich Null ist, so sieht man, dass die Niveaudifferenz zwischen beiden Kugeln, somit auch der zwischen ihnen stattfindende Wärmestrom oder die Kraft unendlich werden muss.

Es wäre jedoch voreilig, von diesem Falle auf unseren Fall einen Schluss zu ziehen, da in unserem Falle, wo die einzelnen Kugeln auf allen Seiten von Kugeln umgeben sind, die inducirenden Kräfte sich gegenseitig aufheben. Dass die Wirkung der inducirten Kugel in der That nicht unendlich werden kann, werden wir im folgenden Paragraphen sehen.

§ 53.

Der inducirte Magnetismus des Ellipsoids.

Wenn die inducirende Kraft constant gleich 1 ist und in der Richtung der X -Achse liegt, somit $V = a$ gesetzt werden muss, so hat man $\frac{dV}{dn}$ gleich der Kraft in der Richtung der Normale gleich $\cos(nx)$. Be-

zeichnet man nun mit U die Potentialfunction des inducirten Körpers, wenn derselbe mit Stoff von der Dichte 1 erfüllt ist, so hat man:

$$\int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} = \int \cos(nx) \frac{d\sigma}{r} = - \frac{dU}{da} \quad (\S\S 17, 18).$$

Nun ist für's Ellipsoid im Innern desselben (§ 23):

$$U = -\frac{1}{2} (P' a^2 + Q' b^2 + R' c^2) \cdot \frac{4\pi}{3},$$

wenn man unter P' , Q' , R' dieselben Ausdrücke wie in § 23, nur mit $-\frac{4\pi}{3}$ dividirt, versteht. Wir wählen diese bequemere Bezeichnungsweise, weil diese für die Kugel $P' = Q' = R' = 1$ giebt, und haben sodann:

$$\frac{3\kappa}{4\pi} \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} = \kappa P' a.$$

Wenn man mit diesem Resultat die Gleichung § 50 f) vergleicht, so sieht man augenblicklich, dass φ gleich a mal einem constanten Coefficienten sein wird. Substituirt man $\varphi = Ca$ in Gleichung § 50 b), so ergiebt sich:

$$a(1 - d - \kappa)C + a + a\kappa P'C = 0,$$

und hieraus:

$$\varphi = \frac{-a}{1 - d - \kappa + P'\kappa},$$

$$Q = \frac{+3\kappa}{4\pi(1 - d - \kappa + P'\kappa)} \frac{dU}{da},$$

oder wenn die inducirende Kraft 1 in einer Richtung wirkt, deren Cosinus l , m , n sind:

$$a) \quad Q = Al \frac{dU}{da} + Bm \frac{dU}{db} + Cn \frac{dU}{dc},$$

wobei

$$A = \frac{3\kappa}{4\pi(1 - d - \kappa + P'\kappa)}; \quad B = \frac{3\kappa}{4\pi(1 - d - \kappa + Q'\kappa)};$$

$$C = \frac{3\kappa}{4\pi(1 - d - \kappa + R'\kappa)}.$$

Ist das Rotationsellipsoid stabförmig in die Länge gezogen, so wird nach § 23 $R' = 0$, $P' = \frac{3}{2}$, $Q' = \frac{3}{2}$; ist der Stab also mit der Kraft gleich gerichtet, so hat man:

$$Q = \frac{3\kappa}{4\pi(1-d-\kappa)} \frac{dU}{dc},$$

und hieraus sieht man wieder, dass d höchstens gleich $1 - \kappa$ sein und man bei der Anordnung, welche in § 51 erörtert wurde, setzen kann:

$$d < 0,2503 \dots$$

Ist das Maximum von d gleich $1 - \kappa$, so wird das Maximum der in der Kugel inducirten Potentialfunction gleich

$$Q = -\frac{a'}{r^2}.$$

Bezüglich der Function U wird auf § 24 verwiesen.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Kraft wissen will, welche das inducirte Ellipsoid an seiner Oberfläche ausübt; denn nach § 18 erleiden die zweiten Differenzialcoefficienten der Potentialfunction an der Oberfläche eine sprungweise Aenderung, indem

$$\Delta \frac{d^2 V}{dp dq} = -4\pi \cos(np) \cos(nq)$$

ist, wenn p und q zwei beliebige Richtungen und n die Richtung der Normale an der Oberfläche des gegebenen Körpers bedeuten. Ist nun das Ellipsoid in der Richtung c lang gestreckt, so werden im Innern desselben alle zweiten Differenzialcoefficienten gleich Null und man hat für die unmittelbar an der Oberfläche in einer beliebigen Richtung p wirkende Kraft den Ausdruck:

$$K_p = \frac{3\kappa}{(1-d-\kappa)} \cdot \cos(nc) \cos(np).$$

Die Kraft steht also überall auf der Oberfläche senkrecht und ist in der Mitte des Stabes gleich Null.

§ 54.

Modification, welche die bisher entwickelten Gesetze in der Natur erleiden.

Die seitherigen Entwicklungen beruhten auf der Voraussetzung, dass bei der Potentialfunction eines durch Induction magnetisirten Atoms in der Ferne, welche nach § 49 lautet:

$$\frac{q^3}{r^2} (a' C_a + b' C_b + c' C_c),$$

das magnetische Moment $\sqrt{C_a^2 + C_b^2 + C_c^2}$ gleich der im Centrum des Atoms ausgeübten Kraft sei. Das ist aber selbstverständlich in der Natur nicht der Fall, sondern in der Natur kann jeder Körper auch durch die stärkste magnetische Kraft nur bis zu einem gewissen Maximum magnetisirt werden. Sind also die Projectionen der magnetisirenden Kraft gleich K_a, K_b, K_c , so ist das Moment des magnetisirten Atoms gleich $F(K_a^2 + K_b^2 + K_c^2)$ und seine Projectionen sind:

$$\frac{F(K_a^2 + K_b^2 + K_c^2)}{\sqrt{K_a^2 + K_b^2 + K_c^2}} \cdot (-K_a, -K_b, -K_c),$$

wobei F eine Function bedeutet, welche einen gewissen Grenzwert f annimmt, wenn das Argument unendlich wird.

Man kann aber auch die Sache umkehren und sagen: Ist ein Atom durch eine Kraft magnetisirt und sind die Projectionen des magnetischen Momentes C_a, C_b, C_c , so ist die magnetisirende Kraft gleich

$$\varphi(C_a^2 + C_b^2 + C_c^2)$$

und ihre Projectionen sind:

$$a) \quad \frac{\varphi(C_a^2 + C_b^2 + C_c^2)}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2 + C_c^2}} \cdot (-C_a, -C_b, -C_c)$$

und jetzt bedeutet φ die Umkehrung von F ; es wird also φ gleich unendlich, wenn das Argument gleich f ist.

Nun ist die Gleichung § 50 a) unter der Voraussetzung gebildet, dass C_a gleich der magnetisirenden Kraft sei. Integriert man diese Gleichung, so findet man für die magnetisirende Kraft den Ausdruck:

$$b) \quad \begin{cases} -(d + \kappa) C_a + \frac{dV}{da} \\ + \frac{3\kappa}{4\pi} \frac{d}{da} \int \frac{d\sigma}{r} [C_x \cos(nx) + C_y \cos(ny) + C_z \cos(nz)]. \end{cases}$$

Setzt man nun die Ausdrücke a) und b) einander gleich, so hat man:

$$c) \quad \begin{cases} 0 = \left[\frac{\varphi(C_a^2 + C_b^2 + C_c^2)}{\sqrt{C_a^2 + C_b^2 + C_c^2}} - d - \kappa \right] C_a + \frac{dV}{da} \\ + \frac{3\kappa}{4\pi} \frac{d}{da} \int \frac{d\sigma}{r} [C_x \cos(nx) + C_y \cos(ny) + C_z \cos(nz)], \end{cases}$$

nebst zwei entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenrichtungen.

Für's Ellipsoid gestaltet sich nun die Rechnung ebenso einfach, wie im vorigen Falle. Setzt man nämlich die drei Projectionen des magnetischen Momentes constant, also:

$$C_a = A; \quad C_b = B; \quad C_c = C,$$

so sieht man, dass die Gleichungen c) erfüllt werden, wenn die magnetisirende Kraft constant ist. Wirkt diese z. B. in der Richtung der Coordinatenachse C und ist gleich K , so hat man:

$$A = 0; \quad B = 0;$$

$$C = \frac{-CK}{\varphi(C^2) - C(d + \kappa - R'\kappa)},$$

eine transcendente Gleichung, aus welcher sich C bestimmen lässt, wenn K und φ gegeben sind.

Berichtigungen.

Seite 13 Zeile 22 lies $\frac{dp}{dn}$ statt $\frac{dnp}{dp}$.

Seite 94 Zeile 8 und 11 lies $T = \frac{1}{r} +$ statt $\frac{1}{r} -$.

Bei Formel f) streiche $(-1)^s$.

Seite 110 Zeile 9 lies $4\pi V =$ statt $V =$, wonach sich auch die darauffolgende Entwicklung theilweise modificirt.





Seiler



Wand, Theodor,

Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie nebst
ihren vorzüglichsten Anwendungen ; im Grundriss dargestellt

Leipzig 1871

Phys.sp. 716

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11018513-6